

Chapitre 1 : La transformée en Z

La **transformée en Z** est une adaptation de la transformée de Laplace pour l'étude des réponses transitoires des systèmes numériques ou discrets. La transformée en Z est donc relative aux suites numériques. Elle permet de ce fait un traitement des signaux et systèmes échantillonnés, analogue à celui que permet la transformée de Laplace pour les signaux et systèmes analogiques. En pratique, on utilisera le plus souvent possible la table des transformées en Z pour travailler.

1. Définition

La transformée en Z peut s'obtenir à partir de la transformée de Laplace en effectuant le raisonnement suivant :

Soit $F^*(p)$ la transformée de Laplace du signal échantillonné $f^*(t)$ représenté ci-contre.

$$f^*(t) = f_0 \mathbf{d}(t) + f_1 \mathbf{d}(t - T_e) + \dots$$

La transformée de Laplace s'écrit :

$$F^*(p) = f_0 + f_1 e^{-pT_e} + f_2 e^{-2pT_e} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{-k p T_e}$$

On peut constater que la transformée de Laplace d'un signal échantillonné s'exprime comme une somme de terme en e^{-pT_e} . Pour exprimer la transformée en Z, on effectuera simplement le changement de variable $z = e^{-pT_e}$, où p est la variable de Laplace, cette variable étant en général considérée comme **complexe** (écrite quelques fois $p = \alpha + j\beta$).

La transformée en Z est par conséquent définie par :

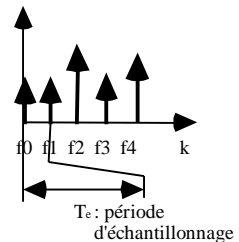
$$\mathbf{Z}(f(t)) = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-k}$$

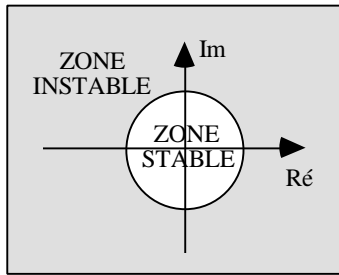
Dans la transformée en Z, la sommation s'effectue à partir de 0 ce qui suppose que le signal discret est causal, c'est-à-dire que son évolution est la conséquence d'une cause dont l'instant d'apparition est choisi comme origine des indices k .

2. Stabilité en Z

Un système continu a sa fonction de transfert exprimée en p (ou en s) à l'aide de la variable de Laplace. La condition pour qu'un système continu soit stable est que les pôles de sa fonction de transfert en Laplace soient à partie réelle négative.

D'autre part, étant donné que le lien entre les variables p et z s'exprime par la relation $z = e^{-pT_e}$ et que la variable p s'écrit dans le cas général : $p = \alpha + j\beta$, alors $z = e^{-\alpha T_e} e^{-j\beta T_e}$.





Le fait que α soit négatif (condition de stabilité en p) implique que $e^{\alpha T_e}$ soit inférieur à 1. Par conséquent, un système discret dont la fonction de transfert est exprimée en fonction de z est stable si tous les pôles ont un module inférieur à 1. On peut représenter ceci par un cercle unité (représentation polaire). Il faut donc que les pôles de la fonction de transfert se situent à l'intérieur du cercle unité.

1. Propriétés

3.1 Linéarité

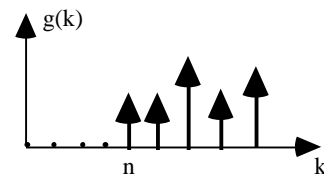
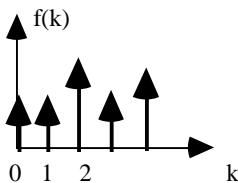
$$\mathcal{Z}(af + bg) = a\mathcal{Z}(f) + b\mathcal{Z}(g)$$

3.2 Théorème du retard temporel

Soient deux signaux discrets $f(k)$ et $g(k)$ tels que :

$$f(k) = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ (signal causal)}$$

$$g(k) = f(k-n), \quad g(k) = 0 \text{ pour } k < n \text{ (} n > 0 \text{)}$$



Calculons $G(z)$ la transformée en z de $g(k)$:

$$G(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(i)z^{-i} = \sum_{i=n}^{+\infty} f(i-n)z^{-i} \text{ puisque } g(i)=0 \text{ sur les premiers échantillons.}$$

En posant $j = i - n$, il vient :

$$G(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(j)z^{-j-n} = z^{-n} \sum_{j=0}^{+\infty} f(j)z^{-j} = z^{-n} F(z)$$

$$\text{d'où } \mathcal{Z}(f_{k-n}) = z^{-n} F(z)$$

Par conséquent retarder un signal causal de n échantillons revient à multiplier sa transformée en Z par z^{-n} .

3.3 Produit de convolution

Le produit des transformées en Z de deux signaux numériques est égal à la transformée en Z du produit de convolution des deux signaux.

$$\mathcal{Z}(f * g) = \mathcal{Z}(f) \mathcal{Z}(g)$$

Démonstration : en supposant que f et g sont causaux :

$$f(k) * g(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)g(k-i), \text{ cherchons la transformée en Z du produit de}$$

convolution :

$$\mathcal{Z}(f * g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} f(i)g(k-i) \right) z^{-k} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f(i)g(k-i) z^{-k} = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i) \sum_{k=0}^{+\infty} g(k-i) z^{-k}$$

On reconnaît dans la seconde sommation la transformée en Z du signal g retardé de i échantillons (car nul pour k<i), il vient donc :

$$\mathcal{Z}(f * g) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)z^{-i} G(z) = G(z) \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)z^{-i} = G(z)F(z) \text{ pour } f \text{ et } g \text{ causals.}$$

3.4 Multiplication par e^{-at}

$$\mathcal{Z}(e^{-akT_e} f(k)) = F(ze^{aT_e})$$

Démonstration :

$$\mathcal{Z}(e^{-akT_e} f(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k e^{-akT_e} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k (ze^{-aT_e})^{-k} = F(ze^{aT_e})$$

3.5 Multiplication par α^t

$$\mathcal{Z}(a^t f(t)) = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

Démonstration : évident à partir de la forme 3.4 en posant α = e^{-a}.

3.6 Multiplication par tⁿ

$$\mathcal{Z}(t^n f(t)) = -T_e z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}(t^{n-1} f(t))$$

Démonstration : raisonnons pour n=1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(tf(t)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kT_e f(k) z^{-k} = T_e z \sum_{k=0}^{+\infty} kf(k) z^{-k-1} = -T_e z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dz} (f(k)z^{-k}) \\ &= -T_e z \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (f(k)z^{-k}) \right) = -T_e z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}(f(t)) \end{aligned}$$

Pour n quelconque, on utilise n fois la relation :

$$\mathcal{Z}(t^n f(t)) = -T_e z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}(t^{n-1} f(t)).$$

2. Transformée en Z des signaux-test

4.1 Dirac

$$\mathcal{Z}(\delta(t)) = 1$$

4.2 Echelon

$$\mathcal{Z}(\Gamma(t)) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

5. Théorème de la valeur finale et de la valeur initiale

5.1 Théorème de la valeur initiale

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$$

Démonstration :

Puisque $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} = f(0)z^0 + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots + f(n)z^{-n} + \dots$ alors lorsque $z \rightarrow \infty$ $F(z) \rightarrow f(0)$.

5.2 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)F(z))$$

Démonstration :

Formons $Z(f(t+T_e) - f(t)) = zF(z) - zf(0) - F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (f(k+1) - f(k))z^{-k}$.

Si l'on fait tendre z vers 1, l'égalité devient :

$$\lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)F(z)) - f(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) - f(0).$$

6. Recherche de l'original $Z^{-1}[X(z)] = x(k)$

Pour la recherche de l'original, il suffit d'utiliser la table de transformée. Toutefois, les formes sont souvent trop compliquées et n'apparaissent par conséquent pas directement dans la table. Il est par conséquent nécessaire d'utiliser une "astuce" telle que la dérivée ou l'intégrale ou, le plus souvent, de décomposer la forme obtenue en formes plus simples à l'aide de la décomposition en éléments simples.

Exemple de résolution de la transformée inverse en Z par décomposition en éléments simples :

La décomposition en éléments simples a pour objectif d'obtenir des formes simples qui soient présentes dans la table de transformée en Z.

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{Az}{z-a} + \frac{Bz}{z-b} + \frac{Cz}{z-c}$$

Lorsque A, B et C seront déterminés, les formes de la partie droite de l'équation ci-dessus sont bien des éléments simples présents dans la table de transformée en Z.

7. TABLE DE TRANSFORMEES EN Z (T_e est la période d'échantillonnage)

N.B. : En fonction des nécessités (notamment pour la décomposition en éléments simples), il est possible de passer de formes en z en formes en z^{-1}

| Passage de Laplace à $z \Rightarrow z = e^{pT_e}$ | $x(kT_e) = x_k$ | $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n \cdot z^{-n}$ |
|---|---------------------------------------|--|
| Propriétés ou théorèmes | domaine temporel | domaine symbolique z |
| Linéarité | $x_k + y_k$ $A \cdot x(k)$ 0 | $X(z) + Y(z)$ $A \cdot X(z)$ 0 |
| Théorème du retard | $x_{k-n} = x((k-n)T_e) = x(t - nT_e)$ | $z^{-n}X(z)$ |
| Multiplication par e^{-at} | $e^{-at}x(t) = e^{-akT_e}x_k$ | $X(z \cdot e^{aT_e})$ |

| | | | |
|--|--|--|--|
| Multiplication par k | $k \cdot x_k$ | $-z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$ | |
| | $k \cdot \Gamma_k$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ | |
| | $at \cdot \Gamma_k = akT_e \cdot \Gamma_k$ | $\frac{A \cdot T_e \cdot z}{(z-1)^2}$ | |
| | $k^2 \cdot \Gamma_k$ | $\frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$ | |
| | $k^3 \cdot \Gamma_k$ | $\frac{z \cdot (z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$ | |
| Multiplication par a^k | $a^k x_k$ | $X\left(\frac{z}{a}\right)$ | |
| | $a^k \cdot \Gamma_k$ | $\frac{z}{(z-a)}$ | |
| | $ka^k \cdot \Gamma_k$ | $\frac{az}{(z-a)^2}$ | |
| | $k^2 a^k \cdot \Gamma_k$ | $\frac{az}{(z-a)^2} + \frac{2a^2 z}{(z-a)^3}$ | |
| Produit de convolution | $x_k * y_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_{n-k}$ | $X(z) \cdot Y(z)$ | |
| | $x_k \cdot y_k$ | $X(z) * Y(z)$ | |
| Théorème de la valeur initiale $x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$ | Théorème de la valeur finale : $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$ | Théorème de la somme : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n = \lim_{z \rightarrow 1} X(z)$ | |
| domaine temporel | domaine symbolique | domaine temporel | domaine symbolique |
| δ_k | 1 ou z^0 | $te^{-t/T} = kT_e e^{-k \frac{T_e}{T}}$ | $\frac{T_e z \cdot e^{-T_e/T}}{(z - e^{-T_e/T})^2}$ |
| Γ_k (=1 pour $k \geq 0$) | $\frac{z}{z-1}$ | $\begin{cases} e^{-t/T} \sin(\omega t + f) \\ e^{-k \frac{T_e}{T}} \sin(\omega k T_e + f) \end{cases}$ | $\frac{z(z \cdot \sin(f) + e^{-T_e/T} \sin(\omega T_e - f))}{z^2 - 2z \cdot e^{-T_e/T} \cos \omega T_e + e^{-2T_e/T}}$ |
| $t^k \cdot f(t)$ | $-T_e z \cdot \frac{d}{dz} \cdot Z(t^{k-1} f(t))$ | | $-\frac{\Pi}{2} < \phi < \frac{\Pi}{2}$ |
| $t \cdot f(t)$ | $-T_e z \cdot \frac{d}{dz} \cdot Z(f(t))$ | x^*k | $X^*(z^*)$ |
| $\frac{a^k}{k!}$ | $e^{a/z}$ | $\sin \omega t = \sin \omega k T_e$ | $\frac{z \cdot \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$ |
| $k^n T_e^n e^{akT_e}$ | $\frac{\partial^n}{\partial a^n} \left[\frac{1}{1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1}} \right]$ | $\cos \omega t = \cos \omega k T_e$ | $\frac{z \cdot (z - \cos(\omega T_e))}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$ |

8. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur la transformée en Z.