

Chapitre 0 : Signaux discrets (rappels)

1. Introduction

Les signaux physiques existant dans la nature sont en général des signaux de type analogique (on dit aussi continu, au sens où le signal est une fonction continue du temps) et il sera nécessaire, lorsque nous voudrons les faire transiter sur un réseau, de les échantillonner. Nous allons voir l'influence de l'échantillonnage (discrétisation) d'un signal sur son spectre (analyse fréquentielle). Ceci nous permettra de mettre en évidence certaines limitations. Nous verrons également comment s'effectue en pratique l'opération d'échantillonnage et quel compromis il est nécessaire de faire entre la théorie et la pratique.

Les avantages des techniques numériques sont :

- la répétabilité parfaite,
- la précision,
- la possibilité de faire transiter de manière transparente sur les mêmes supports des données de types divers (voix et sons, images, données de type informatique...),
- par rapport aux techniques analogiques : pas de vieillissement, pas de dérive...

Les signaux numériques ou discrets ou encore échantillonnés sont le plus souvent issus de signaux analogiques dont on prélève les valeurs à des instants régulièrement espacés : c'est l'opération d'échantillonnage qui transforme un signal continu en une suite numérique. Lorsqu'on veut échantillonner un signal $s(t)$, deux problèmes se posent :

- dans le domaine temporel, quelle est la perte éventuelle d'information et existe-t-il une fonction d'interpolation qui permet de reconstituer le signal continu original de manière univoque à partir de la suite numérique ? Le théorème d'échantillonnage répond à cette question.
- dans le domaine des amplitudes du signal, se pose le problème de la taille numérique des nombres de la série. En effet, du fait de leur manipulation sur un ordinateur, les quantités numériques sont forcément codées sur un nombre fini d'éléments binaires. Il s'agit de l'opération de quantification.

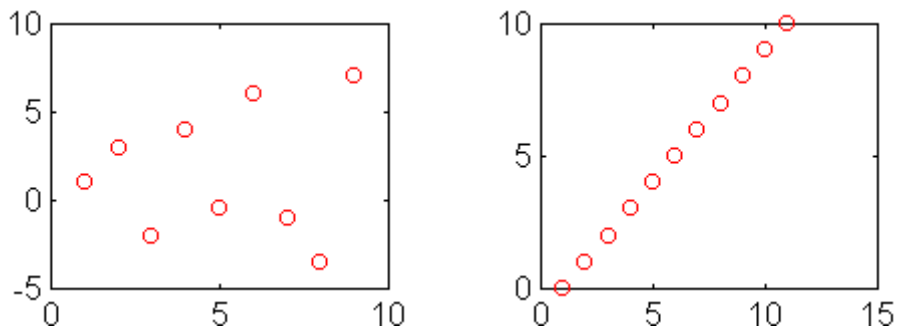
2. Le signal échantillonné

Echantillonner un signal consiste donc à prendre des échantillons de celui-ci à des instants *régulièrement* espacés.

Au niveau écriture, il est habituel de représenter les signaux de la façon suivante.

Soit un signal continu $s(t)$, on prélève un échantillon de celui-ci à chaque période d'échantillonnage T_e (aussi appelée Δ dans la littérature). Les échantillons en fonction du temps peuvent donc s'écrire $s(kT_e)$. Pour simplifier l'écriture et aussi se rapprocher de la représentation mathématique des suites numériques, on écrit : s_k , ce qui signifie le $k^{\text{ème}}$ échantillon du signal $s(t)$ pour $t=kT_e$.

Exemples de signaux discrets :



Aux équations différentielles linéaires à coefficients constants du domaine analogique correspondent, dans le cas discret, des équations récurrentes à coefficients constants.

Ex : Considérons l'équation différentielle : $\dot{x} - ax = 0$ avec $x(0) = c$.

Sa solution est $x(t) = ce^{at}$, $\forall t \geq 0$.

Considérons parallèlement l'équation récurrente $x_{k+1} - ax_k = 0$ avec $x_0 = c$.

Sa solution est $x_k = ca^k$, $\forall k \geq 0$.

N.B. : pour simplifier l'étude mathématique et puisque cela correspond à une réalité physique, nous ne traiterons ici que de signaux causals, qui sont nuls pour $k < 0$.

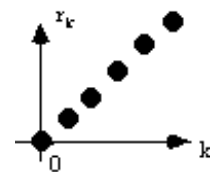
Comme pour les signaux analogiques, des signaux-tests sont utilisés dans le domaine numérique qui sont la rampe r_k , l'échelon Γ_k , l'impulsion de Dirac δ_k et un signal particulier, le peigne de Dirac $\llcorner\llcorner_k$ (lettre cyrillique tcha).

2.1 La suite rampe discrète unitaire $\{r(kT_e)\} = \{r_k\}$

$$\{r_k\} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \quad (\text{causalité}) \\ kT_e & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

La pente exprime la vitesse de variation de la grandeur considérée.

$\theta = ar_k$; $a = 0.2$ degré par seconde exprime par exemple la croissance linéaire de la température d'un four.

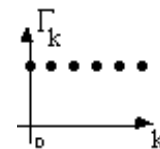


N.B. : la rampe discrète unitaire r_k est le signal issu de l'échantillonnage de la rampe unitaire continue $r(t)$.

2.2 La suite échelon unitaire discret de Heaviside

$\{\Gamma_k\}$ ou fonction existence

$$\{\Gamma(kT_e)\} = \{\Gamma_k\} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0 \quad (\text{causalité}) \\ 1 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

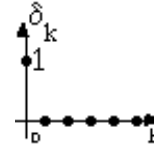


2.3 La suite impulsion de Dirac discrète

$$\{\delta_k\}$$

La définition de l'impulsion de Dirac discrète est la suivante :

$$\{\delta(kT_e)\} = \delta_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0 \\ 1 & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

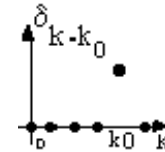


ATTENTION : La définition de l'impulsion de Dirac discrète est sensiblement différente de celle de l'impulsion de Dirac analogique. En effet, ici il n'est pas question de surface unitaire : la suite $\{\delta_k\}$ est une suite d'échantillons valant tous 0 sauf l'échantillon pour $k=0$ qui vaut 1.

2.4 L'impulsion de Dirac discrète décalée $\delta\{k-k_0\}$

La définition de l'impulsion de Dirac discrète décalée est la suivante :

$$\{\delta((k-k_0)T_e)\} = \delta_{k-k_0} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq k_0 \\ 1 & \text{pour } k = k_0 \end{cases}$$



2.5 Le peigne de Dirac unitaire centré $\sum_k \delta(t - kT_e)$ (tcha)

C'est une distribution singulière périodique. On note $\sum_k \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$.

La sommation s'étend sur l'infini (dans le cas idéal) d'une suite de "fonctions de Dirac" retardées $\delta(t - kT_e)$.

La multiplication de $\sum_k \delta(t - kT_e)$ par une fonction s_k est une opération licite qui conduit à une pondération des poids des impulsions du peigne par les valeurs de la fonction aux instants kT_e . Cette opération correspond par ailleurs à une opération d'échantillonnage.

$$s_k \cdot \sum_k \delta(t - kT_e) = \sum_k s_k \cdot \delta(t - kT_e)$$

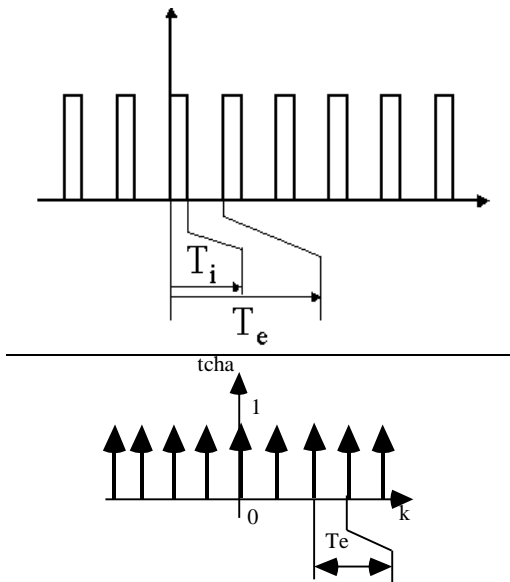
Le spectre, obtenu par décomposition en série de Fourier, est le suivant :

$$F\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \hat{\sum}_k \delta(f)$$

Le résultat obtenu est un peigne de Dirac dans le domaine fréquentiel, autrement dit le spectre d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac, et inversement. On dit aussi que le peigne de Dirac possède la propriété fondamentale d'être invariant dans la transformation de Fourier :

Démonstration :

Décomposition en série de Fourier du peigne de Dirac qui est un signal périodique :



Ci-contre peigne non unitaire (en haut) et peigne de Dirac (en bas).

$$\begin{aligned}
 s(t) = \mathbf{d}(t) &= \lim_{T_i \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_i} \text{ pendant la durée } T_i \\
 c_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} s(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{T_e} \cdot \int_0^{T_e} \mathbf{d}(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T_e} \cdot \lim_{T_i \rightarrow 0} \left(\int_0^{T_i} \frac{1}{T_i} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t} \cdot dt + \int_{T_i}^{T_e} 0 \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) \\
 &= \frac{1}{T_e} \cdot \lim_{T_i \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot t}}{T_i \cdot (-j \cdot n \cdot \omega)} \right]_0^{T_i} = \frac{1}{T_e} \cdot \lim_{T_i \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-j \cdot n \cdot \omega \cdot T_i} - 1}{T_i \cdot (-j \cdot n \cdot \omega)} \right] \\
 &= \frac{1}{T_e} \cdot \lim_{T_i \rightarrow 0} \left[\frac{\left(1 + \frac{-j \cdot n \cdot \omega \cdot T_i}{1!} \right) - 1}{T_i \cdot (-j \cdot n \cdot \omega)} \right] = \frac{1}{T_e} .
 \end{aligned}$$

Le calcul ci-dessus est vrai à condition que $n \neq 0$. Il faut refaire le calcul pour $n = 0$:

$$c_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} s(t) \cdot dt = \frac{1}{T_e} \cdot \int_0^{T_e} \mathbf{d}(t) \cdot dt = \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \rightarrow 0} \int_0^{T_i} \frac{1}{T_i} \cdot dt = \frac{1}{T_e} \lim_{T_i \rightarrow 0} \left[\frac{T_i}{T_i} \right] = \frac{1}{T_e}$$

En représentation bilatérale, on obtient donc des raies d'amplitude $1/T_e$ tous les $1/T_e$.

2.6 Le signal harmonique ou sinusoïdal discret

De même que lorsqu'on étudie un filtre analogique, on fera l'étude de la réponse fréquentielle d'un système numérique et pour cela on considérera un signal sinusoïdal échantillonné pour lequel on fera varier la fréquence entre 0 et une limite maximale que l'on verra plus tard.

2.7 Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Une simulation de l'effet du choix de la fréquence d'échantillonnage sur un signal, Ci-dessous se trouve un extrait de devoir donné en 97-98 en utilisant cette applet

Données numériques :

- Fréquence d'échantillonnage : 1000 Hz,
- Fréquences du signal : 50 Hz ; 500 Hz ; 950 Hz ; 1000 Hz ; 1050 Hz

La courbe de gauche (noire) de l'applet représente une sinusoïde analogique sur laquelle sont schématisés les échantillons extraits du signal sous forme de petites croix. Il est possible de paramétrer la fréquence de la sinusoïde ainsi que la durée d'affichage.

La courbe de droite représente le signal reconstitué sous forme d'une sinusoïde passant au mieux par les échantillons extraits de la courbe de gauche. La fréquence d'échantillonnage est paramétrable.

Préparation :

Il est demandé d'observer le signal pendant 10 périodes.

- Donner la valeur de la "durée d'affichage en secondes" pour chacun des signaux définis ci-dessus.
- Donner le nombre d'échantillons par période (à calculer) et donner la manière de faire le calcul pour le premier signal.
- La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est-elle respectée pour chacun des cinq cas ? Expliquez.

En utilisant l'applet :

Tester chacun des cinq signaux à l'aide des paramètres calculés précédemment. Pour chacun, représenter succinctement les courbes obtenues, de gauche et de droite, constater les résultats obtenus (nombre de périodes visibles à l'écran, nombre d'échantillons sur chaque courbe, nombre d'échantillons par période), et commenter ces résultats.

Vous trouverez également dans cette partie du serveur :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur le signal échantillonné,
- Un questionnaire d'auto-évaluation sur la numérisation.

3. Problèmes d'apodisation (fenêtrage)

Les fenêtres ci-dessous ont été calculées par MATLAB à partir d'une fenêtre de 64 points et d'un calcul de FFT sur 4096 points :

```
plot(boxcar(64))
%Calcul du spectre linéaire
spectre=abs(fft(boxcar(64),4096));
spectre=spectre/64;%maximum normalisé à 1
plot(spectre(1:400))%zoom sur les 400 premiers points du spectre
%Calcul du spectre semi-logarithmique (comme sur les modules FFT des
oscilloscopes)
spectrelog=20*log(spectre)/log(10);
plot(spectrelog(1:400))
```

Dans le tableau ci-dessous, la colonne de gauche représente la fenêtre, la colonne centrale le spectre linéaire et la colonne de droite le spectre logarithmique (zoom sur les 400 premiers points dans ces deux derniers cas)

3.1 Fenêtre rectangulaire

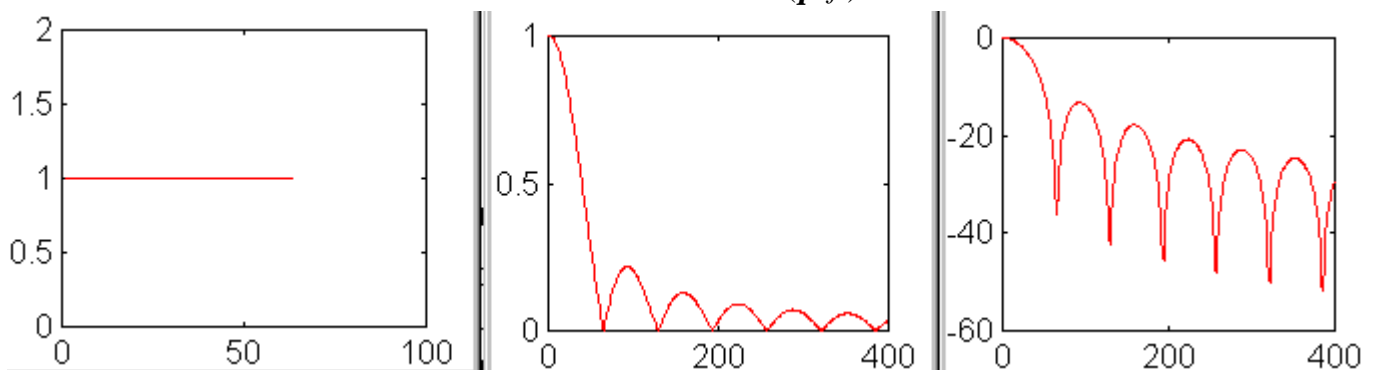
Cette fenêtre est définie par :

$$\begin{cases} f_n = 1 & \text{pour } 0 \leq n \leq N - 1 \\ f_n = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On peut également considérer cette fenêtre comme étant le cas particulier de la fenêtre de Hamming généralisée pour $\alpha = 1$ (cf. fenêtre de Hamming).

Son expression fréquentielle est :

$$W_R(e^{j2\pi f}) = e^{-j\pi(N-1)f} \cdot \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)}$$



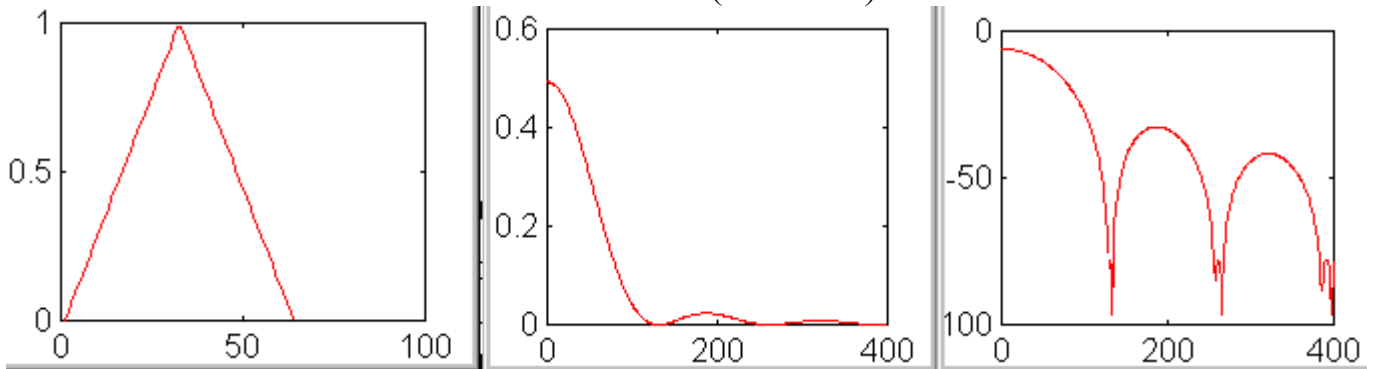
3.2 Fenêtre triangulaire ou de Bartlett

Cette fenêtre est définie par :

$$\begin{cases} f_n = \frac{n}{N/2} & \text{pour } 0 \leq n \leq N/2 \\ f_{N-n} & \text{pour } N/2 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Son expression fréquentielle est :

$$W_T(e^{j2\mathbf{p}.f}) = e^{-j2\mathbf{p}(N/2-1).f} \left(\frac{\sin(\mathbf{p} \cdot \frac{N}{2} \cdot f)}{\sin(\mathbf{p} \cdot f)} \right)^2$$



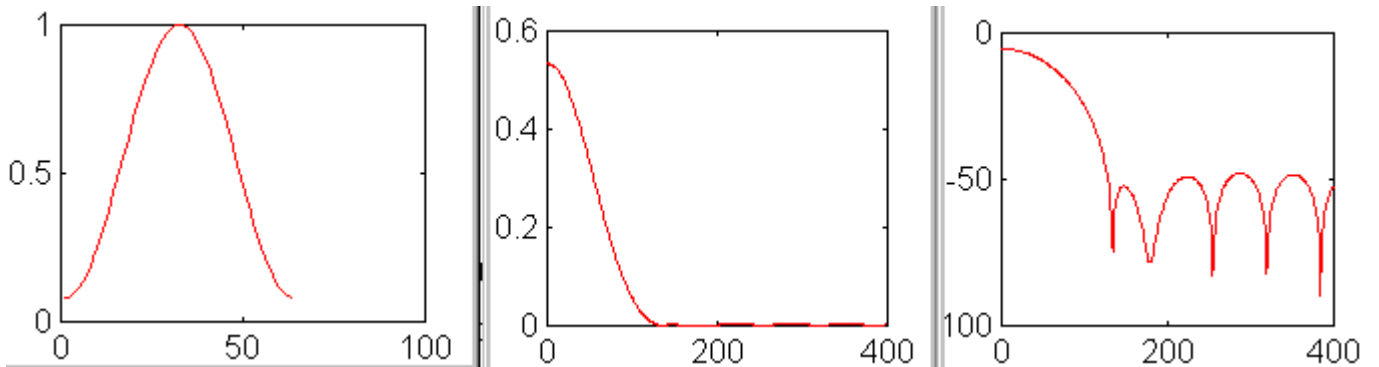
3.3 Fenêtre de Hamming

La fenêtre de Hamming généralisée a pour équation :

$$\begin{cases} f_n = \mathbf{a} + (1 - \mathbf{a}) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot n}{N}\right) \text{ pour } 0 \leq n \leq N - 1 \\ f_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

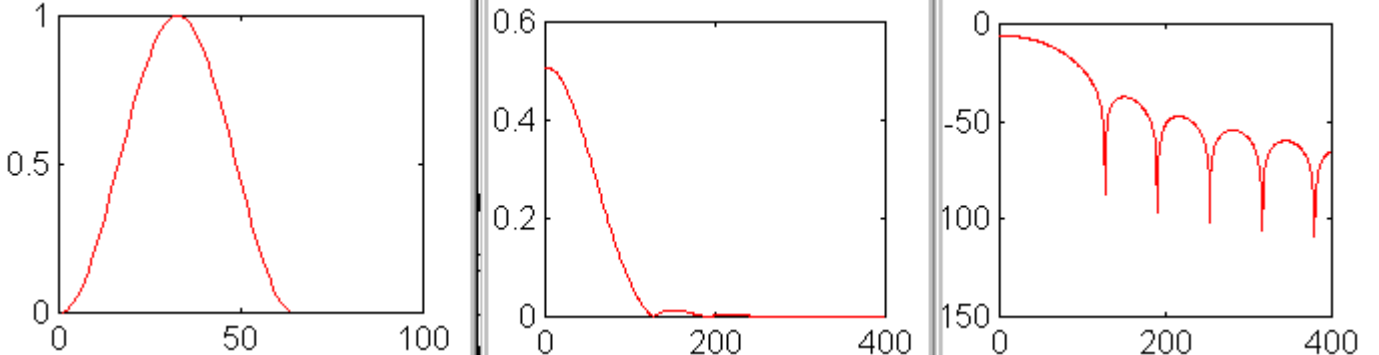
La fenêtre de Hamming proprement dite est le cas particulier de la fenêtre généralisée pour $\alpha = 0,54$. Les fenêtres de la famille Hamming se caractérisent par un pic central de largeur double de la fenêtre rectangulaire mais une atténuation des oscillations sensiblement plus importante. La représentation fréquentielle de la fenêtre de Hamming généralisée a pour équation :

$$W_{Hg}(e^{j2\mathbf{p}.f}) = \mathbf{a} \cdot W_R + \frac{1 - \mathbf{a}}{2} \cdot [W_R(e^{j2\mathbf{p}(f-1/N)}) + W_R(e^{j2\mathbf{p}(f+1/N)})]$$



3.4 Fenêtre de Hann

La fenêtre de Hann (ou Hanning) est le cas particulier de la fenêtre de Hamming généralisée pour $\alpha = 0,5$



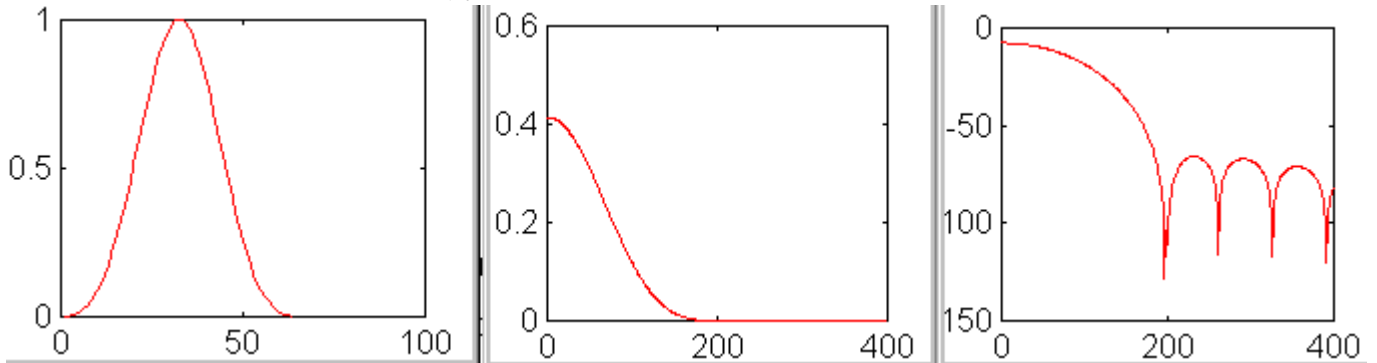
3.5 Fenêtre de Blackman

Cette fenêtre est une extension de l'idée de Hamming. Le premier lobe est plus large mais l'atténuation est encore plus élevée. Elle est définie par :

$$\begin{cases} f_n = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \cdot a_m \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot p \cdot n \cdot m}{N}\right) \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ f_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

avec la contrainte : $\sum_{m=0}^{M-1} a_m = 1$. Son expression fréquentielle est :

$$W_B(e^{j \cdot 2 \cdot p \cdot f}) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \cdot \frac{a_m}{2} \cdot [W_R(e^{j \cdot 2 \cdot p \cdot (f-m/N)}) + W_R(e^{j \cdot 2 \cdot p \cdot (f+m/N)})]$$

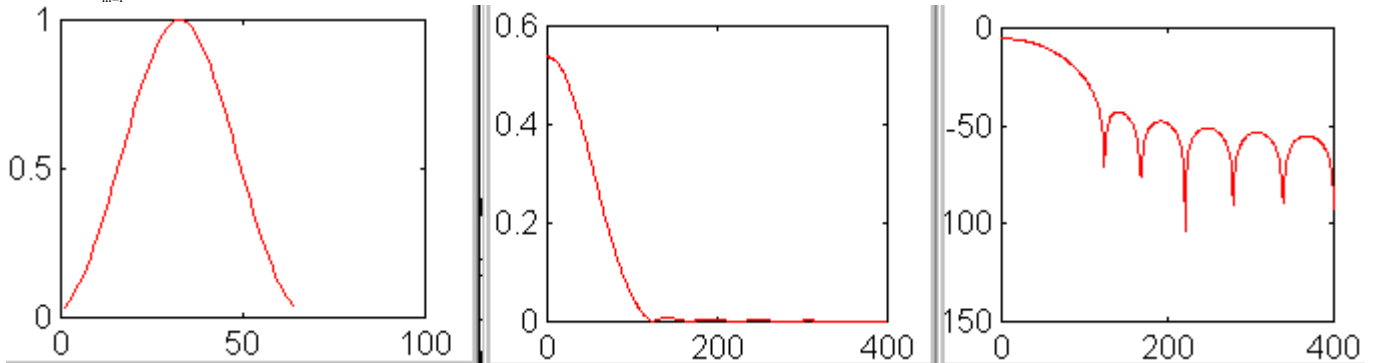


3.6 Fenêtre de Kaiser (avec $\beta = 5$)

La fenêtre de Kaiser permet de préciser le compromis largeur du pic central/amplitude des oscillations. Elle est définie par :

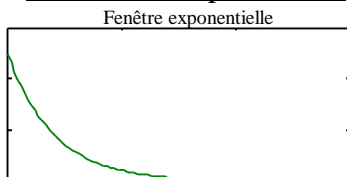
$$\begin{cases} f_n = \frac{I_0[\beta \cdot \sqrt{N^2 - 4 \cdot n^2}]}{I_0(\beta N)} \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1 \text{ où } I_0 \text{ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 :} \\ f_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

$$I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^M \left(\frac{(x/2)^m}{m!}\right)^2. \text{ En général, } 4 \leq \beta \leq 9 \text{ et } M = 14.$$



En prenant β de l'ordre de 4,5, l'atténuation est voisine de celle de Hamming mais le pic central est moins large. Pour β de l'ordre de 9, le pic est plus large mais l'atténuation plus importante.

3.7 Fenêtre exponentielle



La fenêtre à réponse exponentielle est utile pour la mesure des signaux transitoires (de type impulsion).

Le début du signal n'est pas perturbé, mais la fin de l'enregistrement temporel est forcée à zéro. **La fenêtre exponentielle ne convient que pour la mesure des signaux transitoires.** Cette fenêtre est définie par :

$$\begin{cases} f_n = B \cdot e^{-a \cdot t} \text{ pour } t \geq 0 \\ f_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Son expression fréquentielle est :

$$W_E(e^{j \cdot 2 \cdot p \cdot f}) = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot p \cdot f + a}$$

3.8 Problème des fuites spectrales

Ce problème intervient lorsque la transformée de Fourier discrète n'est pas calculé sur un nombre entier de périodes. Le motif répété pour créer le signal périodique n'est dans ce cas pas celui attendu. En effet, dans ce cas, le spectre obtenu par FFT n'est pas une bonne approximation du spectre réel. Etant donné que l'utilisateur n'a souvent aucun contrôle sur la localisation du signal dans l'enregistrement temporel, il faut généralement envisager l'existence possible d'une discontinuité. Cet effet, connu sous le nom de fuites (leakage), est manifeste dans le domaine fréquentiel. Cette discontinuité provoque, par effet de transitoire, un élargissement de la raie spectrale (qui devrait apparaître très fine). L'utilisation d'une fenêtre type Hanning ou Blackman aura pour effet, en filtrant fortement les extrémités du motif dans le domaine temporel, d'atténuer l'effet des fuites. Il pourra également être le cas échéant judicieux d'essayer, lorsque cela est possible, de synchroniser l'analyseur de spectre (module FFT) sur un nombre entier de périodes d'échantillonnage du signal périodique à analyser. D'autre part, la résolution de l'analyseur (plus petite fréquence entre deux raies) est égale à $1/T_e$.
Considérons, par exemple, le cas d'un signal sinusoïdal de $f = 50$ Hz et d'amplitude 1 échantillonné à $f_e = 1000$ Hz.

