Chapitre 5 : Analyse des filtres récursifs ou RII

1. Introduction

1.1 Définition

Les filtres récursifs sont décrits par une équation de récurrence de la forme :

$$s_k = \sum_{i=0}^{p} b_i e_{k-i} - \sum_{j=1}^{q} a_j s_{k-j}$$

Si on applique la transformée en Z à cette équation, on obtient :

$$S(z) = \left(\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}\right) E(z) - \left(\sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}\right) S(z) \text{ ou } \left(1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}\right) S(z) = \left(\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}\right) E(z)$$

La fonction de transfert d'un filtre récursif a donc la forme générale suivante :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z^{-j}}$$

Cette fonction de transfert possède q pôles car le degré du dénominateur est égal à q. On dit alors que le filtre est **d'ordre q**. Si le numérateur ne contient que le terme b_0, on dit que le filtre est **purement récursif**.

Parmi les principaux mérites des filtres récursifs, on peut citer :

- la possibilité d'obtenir une bande de transition étroite pour un ordre raisonnable,
- la possibilité d'obtenir des déphaseurs purs,

et parmi les défauts :

- les risques d'instabilité dus à une grande sensibilité numérique des coefficients mais que l'on peut contrôler en déterminant une structure mieux adaptée,
- une variation de phase fortement non linéaire si l'on ne se donne pas de contrainte sur celle-ci au moment de la synthèse.

1.2 Stabilité

La fonction de transfert possède des pôles. Il faudra alors s'assurer de la stabilité. En effet et contrairement aux filtres non récursifs, la stabilité du filtre récursif ne sera pas assurée dans tous les cas.

2. Analyse des filtres purement récursifs du premier ordre

2.1 Equation de récurrence et fonction de transfert

Un filtre purement récursif du 1er ordre peut être décrit par l'équation de récurrence suivante :

$$s_k = b_0 e_k - a_1 s_{k-1}$$

b_0 et a_1 étant des constantes réelles.

La fonction de transfert en z est alors de la forme :

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$$

2.2 Réponse impulsionnelle

2.2.1 Calcul à partir de l'équation de récurrence

La réponse impulsionnelle est la réponse {h} au signal d'entrée impulsion de Dirac défini par :

$$\begin{cases} \delta_k = 1 \text{ si } k = 0 \\ \delta_k = 0 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$h_k = b_0 \delta_k - a_1 h_{k-1}$$

ce qui nous donne :

$$h_0 = b_0$$
$$h_1 = -a_1 b_0$$
$$h_2 = a_1{}^2 b_0$$

$$h_k = (-a_1)^k b_0$$

Plusieurs types de réponses peuvent se présenter suivant la valeur de a_1 :

si $|a_1| < 1$: on a $h_k \to 0$ si $k \to +\infty$, par conséquent le filtre est ***stable***.

si $|a_1| = 1$: h_k ne tend pas vers 0 lorsque $k \to +\infty$. Le filtre n'est pas stable, il est dit, dans ce cas, à la ***limite de l'instabilité***.

si $|a_1| > 1$: la suite h_k est divergente. Le filtre est ***instable***.

Dans la suite, on se placera dans l'hypothèse de stabilité.

2.2.2. Calcul à partir de la fonction de transfert

La sortie du filtre est liée à l'entrée par le relation :

$$S(z) = H(z)\,E(z)$$

avec $H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$ et $E(z) = 1$

d'où $S(z) = H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$

On en déduit d'après les tables de transformée en Z :

$$h_k = \left\{ b_0 (-a_1)^k \right\}$$

On retrouve bien la suite h_k obtenue précédemment, vérifiant ainsi que la fonction de transfert d'un système est la transformée en Z de la réponse impulsionnelle.

2.3 Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse {d} au signal d'entrée échelon défini par :

$$\begin{cases} \Gamma_k = 1 \ \text{si} \ k \geq 0 \\ \Gamma_k = 0 \ \text{si} \ k < 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$d_k = b_0 \Gamma_k - a_1 d_{k-1}$$

ce qui nous donne en supposant que $|a_1| < 1$:

$$d_0 = b_0$$
$$d_1 = b_0 - a_1 b_0 = b_0(1 - a_1)$$
$$d_2 = b_0 - a_1(b_0 - a_1 b_0) = b_0(1 - a_1 + a_1{}^2)$$
$$d_3 = b_0(1 - a_1 + a_1{}^2 - a_1{}^3)$$

$$d_k = b_0\left(1 - a_1 + a_1{}^2 - a_1{}^3 + \ldots + (-1)^k a_1{}^k\right) = b_0 \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_1{}^i = b_0 \frac{1 - (-1)^{k+1} a_1{}^{k+1}}{1 + a_1}$$

2.4 Réponse fréquentielle

En posant $z = e^{j2pfT_e}$, on obtient :

$$H(jf) = \frac{b_0}{1 + a_1 e^{-j2pfT_e}} = \frac{b_0}{1 + a_1 \cos(2pfT_e) - j a_1 \sin(2pfT_e)}$$

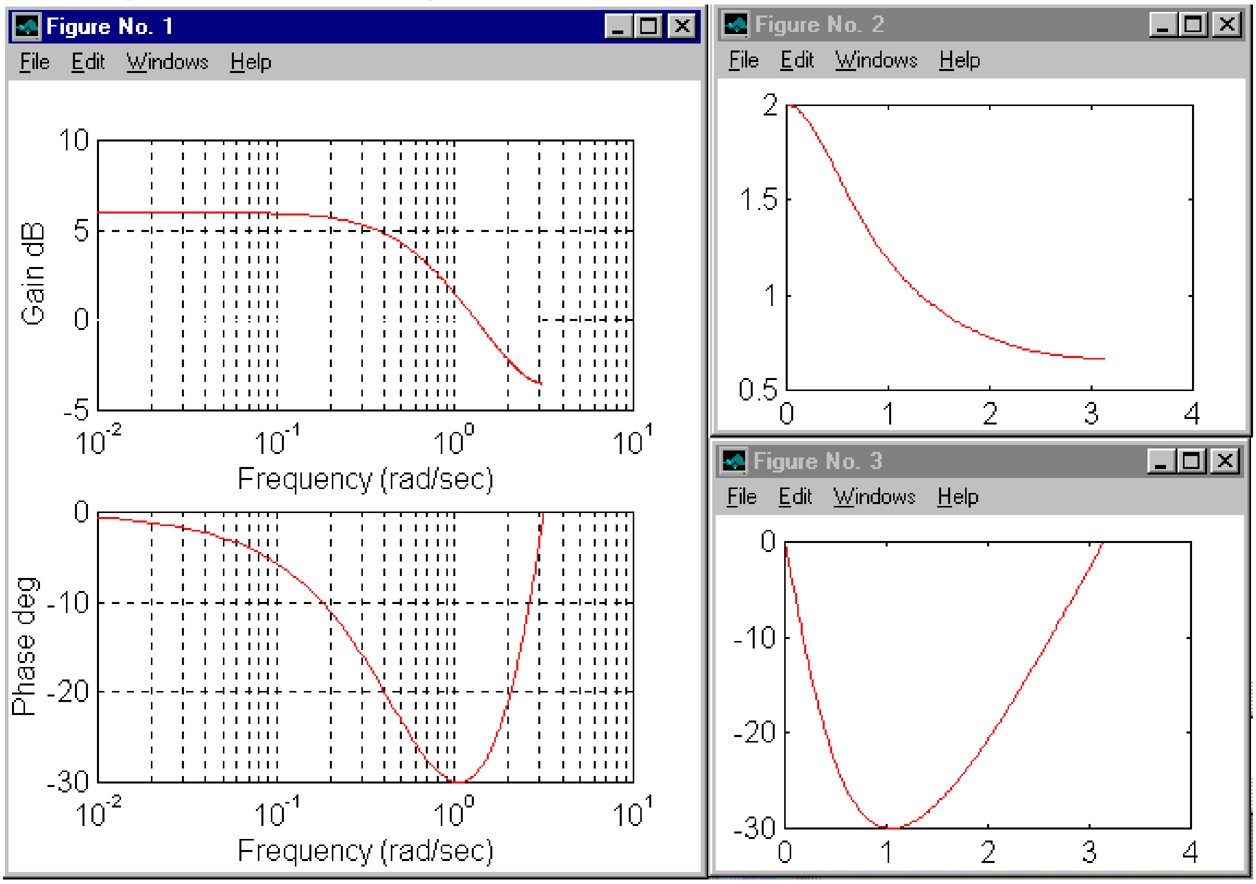
d'où le module :

$$|H(f)| = \frac{|b_0|}{\sqrt{(1 + a_1 \cos(2pfT_e))^2 + a_1{}^2 \sin^2(2pfT_e)}} = \frac{|b_0|}{\sqrt{1 + a_1{}^2 + 2a_1 \cos(2pfT_e)}}$$

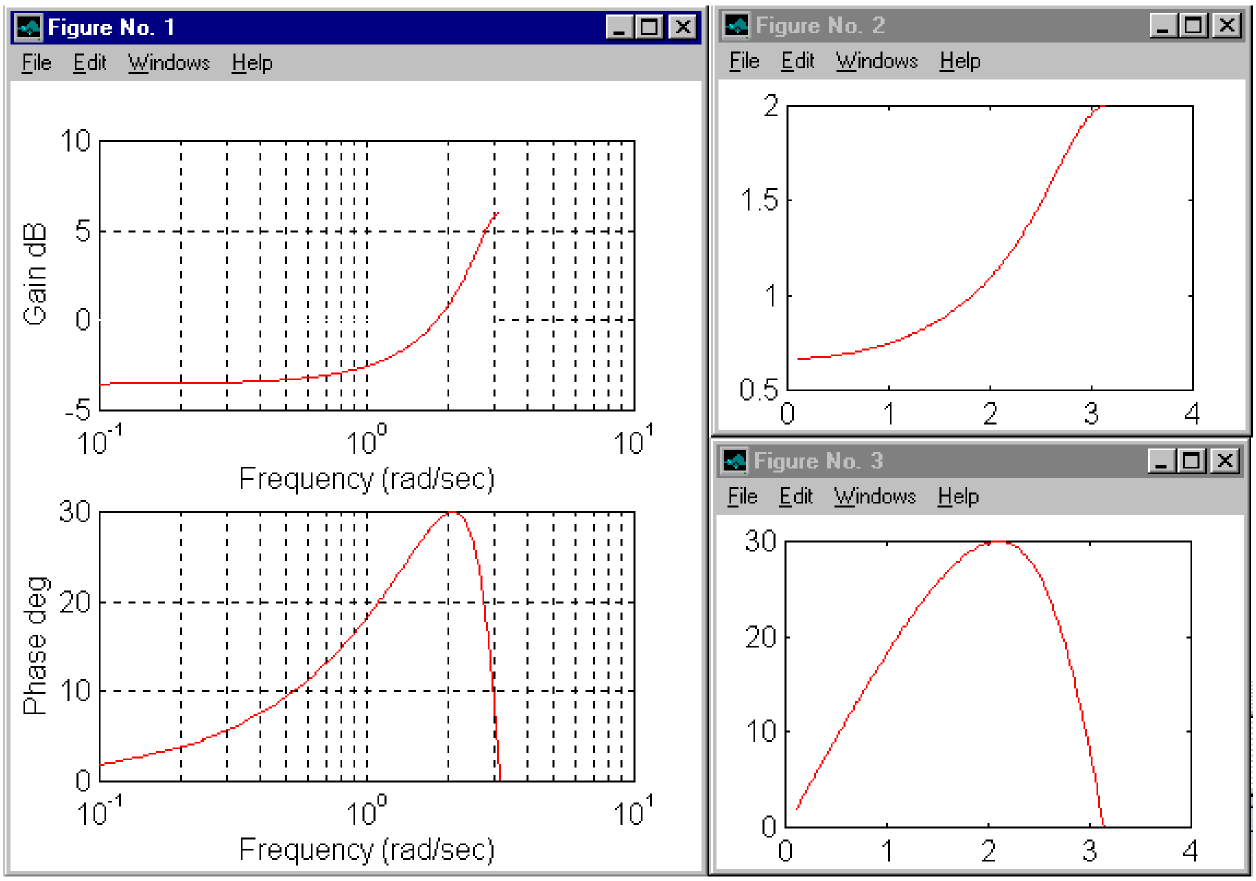
et l'argument :

$$j(f) = \arg(b_0) + Arctg\left(\frac{a_1 \sin(2pfT_e)}{1 + a_1 \cos(2pfT_e)}\right) = Arctg\left(\frac{a_1 \sin(2\Pi fT_e)}{1 + a_1 \cos(2\Pi fT_e)}\right) \text{ défini à } k\pi \text{ près.}$$

Pour une période d'échantillonnage de 1, on obtient pour a_1 =-0,5



Pour a_1 = 0,5



3. Analyse des filtres purement récursifs du second ordre

Equation de récurrence et fonction de transfert

Un filtre purement récursif du second ordre peut être décrit par l'équation de récurrence suivante :

$$s_k = b_0 e_k - a_1 s_{k-1} - a_2 s_{k-2}$$

b_0, a_1 et $a_2$étant des constantes réelles.

La fonction de transfert en Z est alors de la forme :

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)} \quad \text{ou} \quad H(z) = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

4. Analyse des filtres récursifs d'ordre quelconque

Pour étudier les filtres récursifs d'ordre quelconque, on pourra toujours se ramener à une combinaison quelconque des éléments suivants :

* un filtre non récursif d'ordre quelconque,
* un ou plusieurs filtres purement récursifs du second ordre avec des pôles réels, pouvant de ramener en deux fois plus de filtres purement récursifs du premier ordre,
* un ou plusieurs filtres récursifs du second ordre avec des pôles complexes conjugués,
* éventuellement un filtre récursif du premier ordre (si ordre impair).