

Chapitre 4 : Synthèse des filtres non récursifs ou RIF

La synthèse consiste à déterminer la structure d'un filtre en fonction de la réponse fréquentielle que l'on veut obtenir. La réponse fréquentielle d'un filtre numérique est périodique de "période fréquentielle" f_c , par conséquent **la fonction de transfert utile** sera déterminée pour l'intervalle $\left[-\frac{f_c}{2}; \frac{f_c}{2}\right]$.

Principe

Il s'agit de définir le cahier des charges du filtre à réaliser. Il faudra préciser dans le cas général :

- les valeurs limites de la bande passante (ou atténuée),
- les valeurs permises des ondulations en bande passante et en bande atténuée,
- la largeur de la zone de transition permise,
- éventuellement l'ordre maximal permis,
- la fréquence d'échantillonnage.

Exemple de synthèse dans le cas d'un passe-bas de fréquence de coupure f_c

On a $f_c = 0.5(f_p + f_a)$; p signifie zone passante, a zone atténuée.

La réponse fréquentielle est définie par:

$$H(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < f_p \\ 0 & \text{si } |f| > f_a \end{cases}$$

En pratique plus les fréquences f_p et f_a sont proches, plus l'ordre du filtre devra être élevé. Pour un filtre idéal, les trois valeurs seraient confondues.

On spécifie le *gabarit* du filtre en donnant :

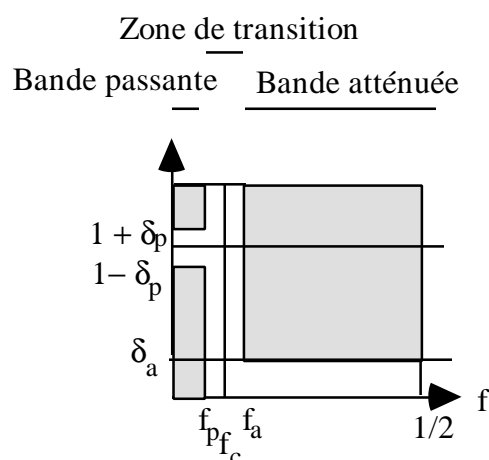
- l'ondulation permise en bande passante en décibels: A_p (dB),

$$A_p \text{ (dB)} = 20 \log(1 + \delta_p) \quad \text{d'où} \quad \delta_p = 10^{0.05 A_p} - 1$$

- l'ondulation permise en bande atténuée en décibels : A_a (dB),

$$A_a \text{ (dB)} = -20 \log \delta_a \quad \text{d'où} \quad \delta_a = 10^{-0.05 A_a}$$

- les fréquences f_p et f_a .



1. Détermination par identification à une structure connue

On pourra procéder par identification à une structure connue. Supposons que l'on veuille concevoir un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c , on peut alors prendre la structure réalisée par le filtre

RIF suivant : $s_n = \frac{1}{2} e_n + \frac{1}{2} e_{n-1}$.

La réponse de ce type de filtre s'obtient de la manière suivante :

$$S(z) = \frac{1}{2}E(z) + \frac{1}{2}E(z)z^{-1} \text{ d'où } H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1},$$

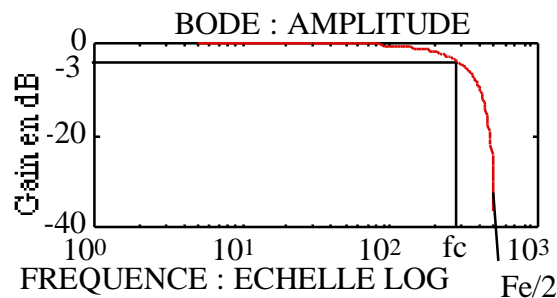
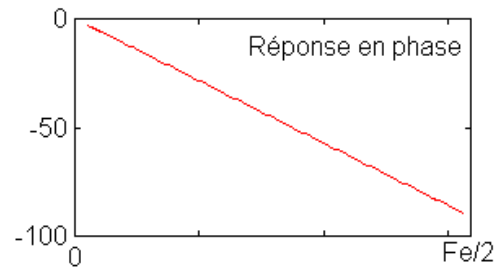
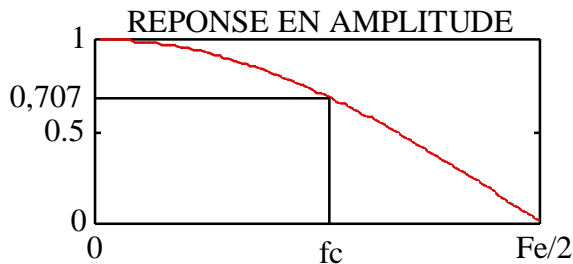
La réponse fréquentielle sera donc :

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega T_e} = \frac{1}{2}(e^{j\omega T_e/2} + e^{-j\omega T_e/2})e^{-j\omega T_e/2} = \cos\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)e^{-j\omega T_e/2}$$

d'où on tirera les réponses en amplitude et en phase :

$$|H(j\omega)| = \left| \cos\left(\frac{\omega T_e}{2}\right) \right|$$

$$\arg(H(j\omega)) = 0 - \frac{\omega T_e}{2}$$



On obtient $f_c = f_e/4$. Par conséquent, si l'on désire une certaine fréquence de coupure f_c , il suffit de fixer f_e . Naturellement dans ce cas, il n'y aura pas similitude de la pente en dB par octave ni du déphasage entre les filtres analogique et numérique.

2. Détermination des coefficients par la méthode de la fenêtre (fonction Matlab FIR1)

2.1 Principe

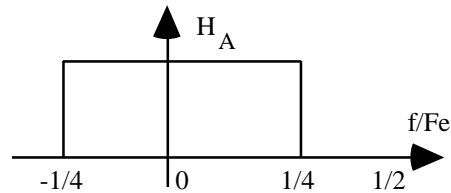
Cette technique consiste, connaissant l'expression analytique $H_A(jf)$ de la réponse fréquentielle à approcher, à déterminer par utilisation de la transformée de Fourier inverse, la réponse impulsionnelle. On sait par ailleurs que les échantillons de la réponse impulsionnelle sont égaux aux coefficients du filtre.

$$h_A(t) = F^{-1}(H_A(jf)).$$

On part en général d'une réponse fréquentielle "connue" mathématiquement de type fenêtre (rectangulaire = filtre idéal, triangulaire, Hann/Hamming,...) puis on obtient une réponse temporelle non causale. Il suffira de retarder cette réponse pour la rendre causale.

Illustrons cette technique dans le cas particulier où l'on désire approcher la fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = \frac{f_e}{4}$. La réponse fréquentielle désirée est tracée ci-dessous et est définie par :

$$\begin{cases} H_A(jf) = 1 \text{ pour } -\frac{f_e}{4} < f < \frac{f_e}{4} \\ H_A(jf) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$



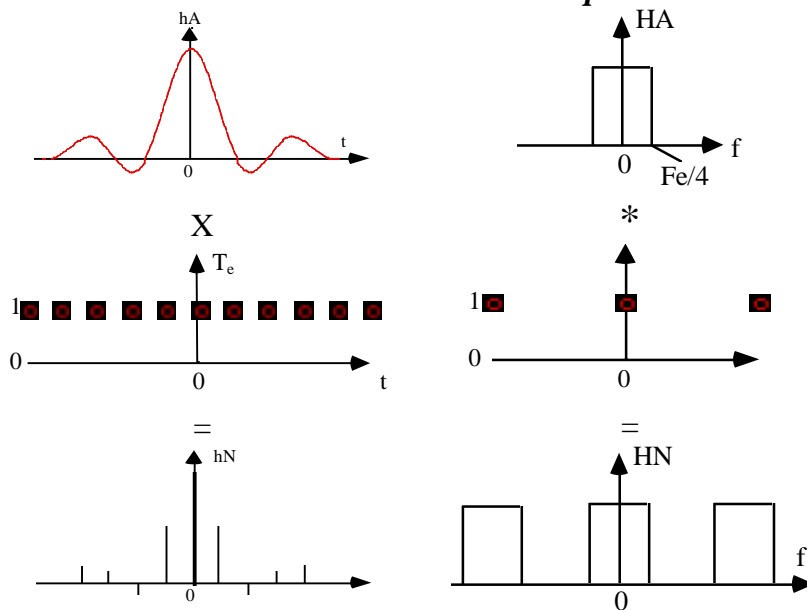
Pour cela, on part du module de la fonction de transfert $H_A(jf)$ à approximer défini sur l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2}; \frac{f_e}{2}\right]$. Il lui correspond une réponse impulsionnelle qui s'écrit :

$$h_A(t) = F^{-1}(H_A(jf)) = \int_{-f_c}^{f_c} e^{j2\pi f t} df = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2t}$$

Pour obtenir la fonction de transfert $H_N(jf)$ du filtre RIF idéal, on "périodise" la fonction $H_A(jf)$, ce qui revient à la convoluer avec un peigne $|_|_|_{F_e}(f)$ de période F_e .

Dans le domaine temporel, cette opération correspond à un échantillonnage à la période T_e de la réponse impulsionnelle accompagné d'une multiplication de l'amplitude par T_e , on trouve ainsi la réponse impulsionnelle $h_N^*(k) = T_e h_A(t)|_|_|_{T_e}$ du filtre numérique idéal. Les échantillons de cette réponse impulsionnelle sont les coefficients du filtre numérique non récursif idéal. Ils s'écrivent :

$$h_k = T_e h_A(kT_e) = \frac{\sin(2\pi f_c k T_e)}{k}$$



Deux défauts apparaissent alors. La réponse impulsionnelle est infinie et non causale. Pour éliminer ces défauts, on procède comme suit :

Pour rendre la réponse impulsionnelle finie, on effectue une troncature de la réponse impulsionnelle échantillonnée obtenue, c'est-à-dire que l'on annule les échantillons situés à l'extérieur d'une "fenêtre" temporelle de largeur $(M+1)T_e$. Tout se passe comme si on multipliait la réponse impulsionnelle h_N^* par une fonction $F(t)$ dite *fenêtre rectangulaire* définie par :

$$\begin{cases} F(t) = 1 \text{ pour } -\frac{(M+1)T_e}{2} < t < \frac{(M+1)T_e}{2} \\ F(t) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

On obtient alors une réponse impulsionnelle $h_{N_M}^*(k)$ tronquée où seuls subsistent $M+1$ échantillons :

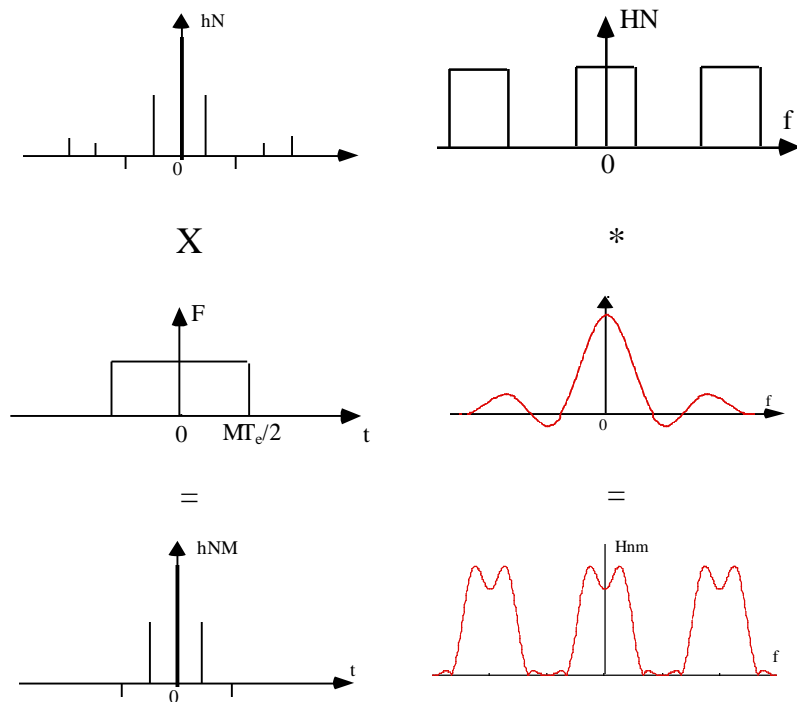
$$h_{N_M}^*(k) = F(k)h_N^*(k) = F(k)(h_A(t)T_e|_{-} |_{+} |_{T_e})$$

$$\begin{cases} h_{N_M}^*(k) = T_e h_A(kT_e) = \frac{\sin(2\mathbf{p}f_c kT_e)}{\mathbf{p}k} & \text{pour } -\frac{(M+1)}{2} \leq k \leq \frac{M+1}{2} \\ h_{N_M}^*(k) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans le domaine fréquentiel, cette multiplication se traduit par une convolution de la fonction idéale $H_N(f)$ avec la transformée de Fourier $F(f)$ de la fonction fenêtre

$$F : F(f) = \frac{\sin(\mathbf{p}fMT_e)}{\mathbf{p}f}$$

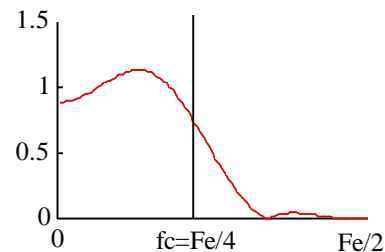
Cette convolution fait apparaître des ondulations en bande passante et en bande atténuée et limite la raideur de coupure du filtre.



Pour une fenêtre rectangulaire et un ordre $M=7$, on obtient :

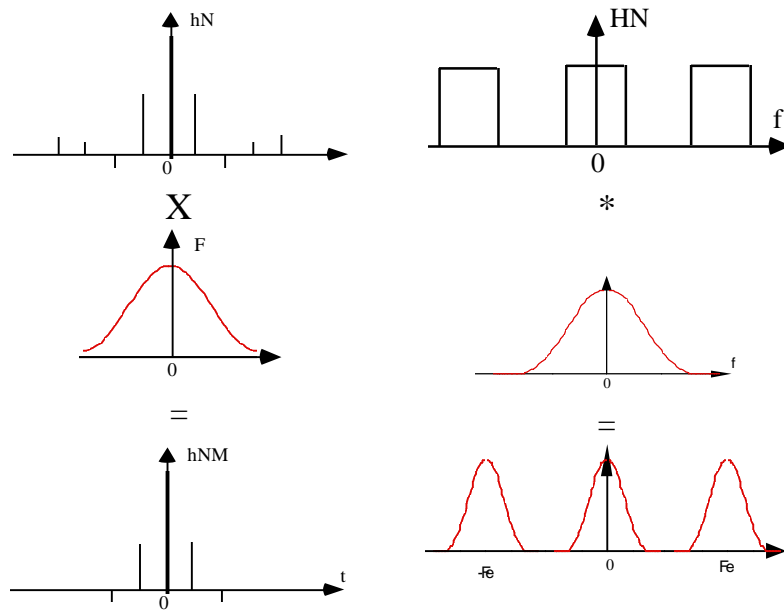
$$\begin{aligned} h(4) &= h(-4) = -0.0721 \\ h(3) &= h(-3) = -0.1010 \\ h(2) &= h(-2) = 0.1683 \\ h(1) &= h(-1) = 0.5048 \end{aligned}$$

($b=fir1(7,0.5,boxcar(8))$ sous MATLAB)



On remarque que la courbe passe par la demi-hauteur de la discontinuité. En augmentant l'ordre du filtre M , on augmente la raideur de la coupure et le nombre d'ondulations mais on ne diminue pas leur amplitude maximale : c'est le **phénomène de Gibbs**. Les ondulations dépendent de celles de $F(f)$. Pour les réduire, on peut imaginer de choisir une fonction fenêtre $w(t)$ dont le spectre $W(f)$ présente moins d'ondulations que celui de $F(t)$. C'est la même situation que celle rencontrée pour l'analyse spectrale et on peut utiliser les mêmes fonctions fenêtres. Si l'on choisit la fonction de Hamming telle que :

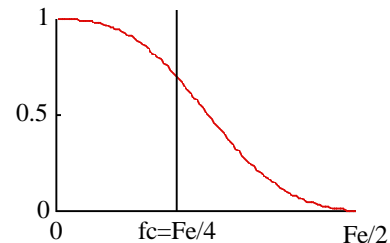
$$\begin{cases} w(t) = 0.54 + 0.46 \cos\left(2\mathbf{p}\frac{t}{MT_e}\right) & \text{pour } -\frac{M}{2}T_e < t < \frac{M}{2}T_e \\ w(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Pour une fenêtre de Hamming et un ordre $M=7$, on obtient:

$$\begin{aligned} h(4) &= h(-4) = -0.0052 \\ h(3) &= h(-3) = -0.0229 \\ h(2) &= h(-2) = 0.0968 \\ h(1) &= h(-1) = 0.4313 \end{aligned}$$

($b=fir1(7,0.5,hamming(8))$ sous MATLAB)



On remarque que si l'on a bien une réduction des ondulations, on a par contre une diminution de la raideur de coupure.

Pour rendre la réponse impulsionnelle causale, on la retarde de $\frac{M-1}{2}$ périodes T_e . A ce retard $\frac{M-1}{2}T_e$ temporel correspond une multiplication par $e^{-j2\pi f \frac{M-1}{2}T_e}$, c'est-à-dire à l'apparition d'une phase linéaire. Les coefficients b_k s'expriment alors par :

$$b_k = T_e h_A \left(\left(k - \frac{M-1}{2} \right) T_e \right) = \frac{\sin \left(2\pi f_c \left(k - \frac{M-1}{2} \right) T_e \right)}{\mathcal{P} \left(k - \frac{M-1}{2} \right)} \text{ pour } 0 < k < M-1 \text{ (fenêtre rectangulaire)}$$

$$b_k = \frac{\sin \left(2\pi f_c \left(k - \frac{M-1}{2} \right) T_e \right)}{\mathcal{P} \left(k - \frac{M-1}{2} \right)} \left(0.54 + 0.46 \cos \left(\frac{2\pi f_c \left(k - \frac{M-1}{2} \right) T_e}{M} \right) \right) \text{ pour } 0 < k < M-1 \text{ (fenêtre de}$$

Hamming).

Le filtre obtenu est donc un filtre RIF à phase linéaire dont le module approche d'autant mieux la fonction désirée que l'ordre et donc le nombre de coefficients est important.

2.2 Utilisation pratique de la méthode

1^{ère} étape: Spécifier la réponse fréquentielle désirée du filtre $H_N(f)$ (ou $H_N(\omega)$). Il faudra faire attention aux fréquences de coupure à prendre en compte. Afin d'avoir de bons résultats lors de la synthèse, **ce ne sont pas les fréquences de coupure du filtre idéal qu'il faut utiliser mais il faut déplacer celles-ci afin de les centrer dans la zone de transition :**

- pour un passe-bas, l'augmenter de la demi zone de transition,
- pour un passe-haut, la diminuer de la demi zone de transition,
- pour un passe-bande, diminuer la première fréquence de coupure de la demi zone de transition et augmenter la seconde de la demi zone de transition,
- pour un réjecteur de bande, on fera l'inverse.

Les tableaux des pages suivantes nécessitent d'utiliser des fréquences réduites, c'est-à-dire des fréquences exprimées non pas en Hz mais en fonction de la fréquence d'échantillonnage. Il y a deux manières d'exprimer la fréquence réduite :

- la première consiste à diviser toutes les fréquences par f_e et par conséquent d'obtenir une nouvelle fonction de la variable f/f_e , cette méthode est très souvent utilisée dans la littérature,
- la seconde consiste à diviser toutes les fréquences par $f_e/2$ et par conséquent d'obtenir une nouvelle fonction de la variable $2f/f_e$, cette méthode est celle que l'on utilisera car c'est celle qui est utilisée par le logiciel Matlab pour effectuer la synthèse.

2^{ème} étape : Obtenir la réponse impulsionnelle $h_N(k)$ du filtre numérique désiré, par l'évaluation de la transformée de Fourier inverse, les coefficients de la réponse impulsionnelle étant en fait les coefficients du filtre. Pour obtenir la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal, on pourra utiliser le tableau ci-dessous :

Réponse impulsionnelle idéale $h_N(k)$		
Type de filtre	$h_N(k), k \neq 0$	$h_N(0)$
Passe-bas	$f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c}$	f_c
Passe-haut	$-f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c}$	$1 - f_c$
Passe-bande	$f_2 \frac{\sin(k\pi f_2)}{k\pi f_2} - f_1 \frac{\sin(k\pi f_1)}{k\pi f_1}$	$f_2 - f_1$
Réjecteur de bande	$f_1 \frac{\sin(k\pi f_1)}{k\pi f_1} - f_2 \frac{\sin(k\pi f_2)}{k\pi f_2}$	$1 - (f_2 - f_1)$

Tableau 1 - Réponses impulsionnelles idéales pour les filtres fréquentiels standards

N.B. : Ce tableau est utilisable en prenant en considération le fait que les fréquences sont normalisées par rapport à la demi-fréquence d'échantillonnage (comme c'est le cas dans Matlab). Les fréquences f_c indiquées dans ce tableau (fréquences de coupure désirées) s'expriment également en fréquences normalisées.

3^{ème} étape : Sélectionner une fenêtre qui satisfait les spécifications requises pour déterminer le nombre de coefficients du filtre en fonction de la largeur de la transition souhaitée.

Type de fenêtre	Δf , largeur de transition (en fréquence réduite)	Ondulation en bande passante A_p (dB)	Atténuation du 1er lobe secondaire (dB)	Atténuation en bande atténuée A_a (dB)	Fonction fenêtre $w_k, k \leq \frac{N-1}{2}$
Rectangulaire	$1.8/N$	0.7416	13	21	1
Hann (Hanning)	$6.2/N$	0.0546	31	44	$0,5 + 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N}$
Hamming	$6.6/N$	0.0194	41	53	$0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi k}{N}$
Blackman	$11/N$	0.0017	57	74	$0,42 + 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N-1} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{N-1}$
Kaiser	$5.86/N$ ($\beta=4.54$)	0.0274		50	$\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-(2k/(N-1))^2}\right)}{I_0(\beta)}$ avec $I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^M \left[\frac{(x/2)^m}{m!} \right]^2$ avec $M < 25$
	$8.64/N$ ($\beta=6.76$)	0.00275		70	
	$11.42/N$ ($\beta=8.96$)	0.000275		90	

Tableau2

N.B. 1 : Ce tableau est utilisable en prenant en considération le fait que les fréquences sont normalisées par rapport à la demi-fréquence d'échantillonnage (comme c'est le cas dans Matlab).

N.B. 2 : Dans ce tableau, N représente le nombre de coefficients du filtre (autrement dit M + 1).

N.B. 3 : Il se peut que les expressions mathématiques des fenêtres données ici soient légèrement différentes de celles que l'on peut trouver dans la littérature (ou dans les boîtes à outils de Matlab). Ces différences traduisent en général simplement un déphasage temporel.

- Pour ce qui concerne les fenêtres rectangulaire, de Hamming, Hanning et Blackman, il existe une relation simple entre la largeur de la bande de transition et l'ordre du filtre. Les ondulations en bande passante sont données en dB, les ondulations en bande atténuée sont identiques, **ceci est une caractéristique des filtres conçus par la méthode de la fenêtre avec les fenêtres rectangulaire, de Hamming, Hann et Blackman.** Les valeurs relatives de l'amplitude du lobe central par rapport au premier lobe secondaire sont ensuite données en dB. L'avant-dernière colonne donne l'atténuation maxi en bande atténuée que l'on pourra obtenir, **cette caractéristique sera un critère de choix important pour le type de fenêtre.** Enfin la dernière colonne rappelle les expressions mathématiques des fenêtres.

- La fenêtre de Kaiser permet d'obtenir des ondulations différentes en bande passante et atténuée. Lors de la conception, il faudra prendre la plus petite des ondulations en bande passante ou atténuée $\delta = \min(\delta_p, \delta_a)$ afin de déterminer la valeur d'un nouveau paramètre β .

Lorsque la paramètre $\beta = 0$, la fenêtre de Kaiser est égale à la fenêtre rectangulaire, et lorsque $\beta = 5.44$, la fenêtre est très proche de la fenêtre de Hamming, mais pas identique. La valeur de β est déterminée en fonction de l'atténuation désirée en bande atténuée et peut être estimée à l'aide des relations empiriques ci-dessous :

$$\beta = 0 \quad \text{si } A < 21 \text{ dB}$$

$$\beta = 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) \quad \text{si } 21 \text{ dB} < A < 50 \text{ dB}$$

$$\beta = 0.1102(A - 8.7) \quad \text{si } A > 50 \text{ dB}$$

où $A = -20 \log_{10}(\delta)$ représente l'atténuation en bande atténuée et δ est obtenu par la formule suivante : $\delta = \min(\delta_p, \delta_a)$. Le nombre de coefficients N du filtre est donné par :

$$N \geq \frac{A - 7,95}{7,18 \cdot \Delta f}$$

4^{ème} étape : Obtenir les valeurs de w_k pour la fenêtre choisie et les valeurs vraies des coefficients h_k comme étant le résultat du produit :

$$h_k = h_{N_k} w_k$$

Le résultat obtenu par cette méthode n'est pas **optimal**, c'est-à-dire qu'un filtre avec un ordre plus faible peut être obtenu par le biais d'autres méthodes (méthodes optimales).

2.3 Exemple

Obtenir les coefficients d'un filtre à RIF passe-bas pour obtenir les spécifications suivantes :

Fréquence de coupure : $f_c = 1.5 \text{ kHz}$

Largeur de transition : $\Delta f = 0.5 \text{ kHz}$

Atténuation en bande atténuée : $A_a > 51 \text{ dB}$

Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 8 \text{ kHz}$

Solution :

Il faudra d'abord convertir toutes les fréquences caractéristiques en fréquences réduites, la fréquence de coupure sera donc $1.5/4 = 0.375$, la largeur de transition sera $\Delta f = \frac{0.5}{4} = 0.125$.

A partir du tableau 1, l'expression de h_{N_k} est donnée par :

$$h_{N_k} = f_c \frac{\sin(k\pi f_c)}{k\pi f_c} \text{ pour } k \neq 0,$$

$$h_{N_k} = f_c \text{ pour } k = 0.$$

Le tableau 2 indique que seules les fenêtres de Hamming, Blackman ou Kaiser peuvent satisfaire les spécifications requises ($A_s > 51$ dB). Pour des raisons de simplicité de la méthode, la fenêtre de Hamming est utilisée dans cet exemple.

1. Détermination de l'ordre : $N = \frac{6.6}{\Delta f} = \frac{6.6}{0.125} = 52.8$, par conséquent $N = 53$ où N est le nombre de coefficients du filtre, l'ordre est donc de $M=N-1=52$.

2. Les coefficients du filtre sont obtenus par l'expression mathématique suivante :

$$h_k = h_{N_k} w_k \text{ pour } -26 \leq k \leq 26$$

L'expression mathématique de $h_N(k)$ est donnée plus haut, celle de w_k est la suivante :

$$w_k = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{53}\right) \text{ pour } -26 \leq k \leq 26$$

La fréquence de coupure à prendre en compte (après centrage dans la zone de transition) est la suivante:

$$f'_c = f_c + \frac{\Delta f}{2} = (1.5 + 0.25)\text{kHz} = 1.75\text{kHz} = \frac{1.75}{4} = 0.4375$$

Les coefficients du filtre sont symétriques, il suffira par conséquent de calculer les valeur de $h(0)$ à $h(26)$.

$$k = 0 : h_N(0) = f_c = 0.4375$$

$$w(0) = 0.54 + 0.46 \cos(0) = 1$$

$$h(0) = h_N(0) w(0) = 0.4375$$

$$k = 1 : h_N(1) = \frac{2 \times 0.4375}{2\mathbf{p} \times 0.4375} \sin(0.4375\mathbf{p}) = 0.31219$$

$$w(1) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi/53) = 0.98773$$

$$h(1) = h(-1) = h_N(1) w(1) = 0.311$$

$$k = 2 : h_N(2) = \frac{2 \times 0.4375}{2 \times 2\mathbf{p} \times 0.4375} \sin(2 \times 0.4375\mathbf{p}) = 0.06091$$

$$w(2) = 0.54 + 0.46 \cos(4\pi/53) = 0.98713$$

$$h(2) = h(-2) = h_N(2) w(2) = 0.0601$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$k = 26 : h_N(26) = \frac{2 \times 0.4375}{26 \times 2\mathbf{p} \times 0.4375} \sin(26 \times 0.4375\mathbf{p}) = 0.01131$$

$$w(26) = 0.54 + 0.46 \cos(52\pi/53) = 0.08081$$

$$h(26) = h(-26) = h_N(26) w(26) = 0.0009$$

Pour rendre le filtre causal, on ajoute 26 à chacun des indices. Les coefficients du filtre sont alors donnés ci-dessous.

$b=fir1(52,0,4375,hamming(53))$

sous Matlab

h(0)=	h(52)=	-0.0009
h(1)=	h(51)=	0.0002
h(2)=	h(50)=	0.0012
h(3)=	h(49)=	0.0003
h(4)=	h(48)=	-0.0018
h(5)=	h(47)=	-0.0014
h(6)=	h(46)=	0.0022
h(7)=	h(45)=	0.0033
h(8)=	h(44)=	-0.0019
h(9)=	h(43)=	-0.0060
h(10)=	h(42)=	0.0000
h(11)=	h(41)=	0.0090
h(12)=	h(40)=	0.0042
h(13)=	h(39)=	-0.0110
h(14)=	h(38)=	-0.0112
h(15)=	h(37)=	0.0105
h(16)=	h(36)=	0.0207
h(17)=	h(35)=	-0.0052
h(18)=	h(34)=	-0.0319
h(19)=	h(33)=	-0.0075
h(20)=	h(32)=	0.0434
h(21)=	h(31)=	0.0325
h(22)=	h(30)=	-0.0533
h(23)=	h(29)=	-0.0856
h(24)=	h(28)=	0.0601
h(25)=	h(27)=	0.3113
h(26)=	h(26)=	0.4375

3. Technique d'échantillonnage en fréquence (fonction Matlab FIR2)

Lorsque l'on ne connaît pas l'expression analytique de $H_A(jf)$, la méthode précédente n'est plus applicable puisqu'on ne peut déterminer $h_A(t)$ par transformation de Fourier inverse. On utilise alors la transformation de Fourier Discrète inverse. C'est-à-dire que l'on "échantillonne" la réponse désirée dans le domaine fréquentiel, on obtient N points de cette réponse fréquentielle auxquels on fait correspondre N points de la réponse temporelle équivalente obtenus par TFD inverse (ou FFT inverse).

4. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 5 du serveur, vous trouverez :

- Un questionnaire d'auto-évaluation sur les filtres numériques non récursifs.