Chapitre 3 : Analyse des filtres non récursifs ou RIF

1. L'équation de récurrence

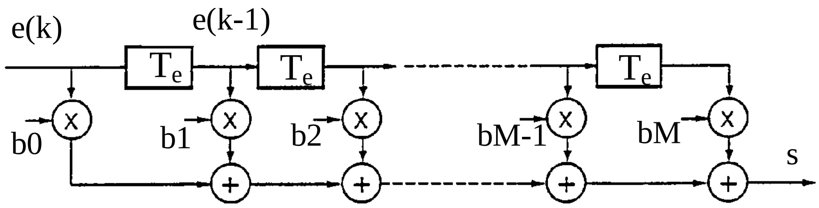
Un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie ou filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale. Il **ne peut pas être obtenu** par transposition d'un filtre continu. Par rapport aux filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) ils présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de coefficients pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles. Ceci est dû au fait que leur fonction de transfert ne possède pas de pôle. Cette absence de pôles permet cependant d'obtenir des filtres inconditionnellement *stables*. Les filtres non récursifs ou RIF sont des systèmes pour lesquels une valeur s_k de sortie est obtenue par une somme pondérée d'un ensemble fini de valeurs d'entrée représentant les échantillons du signal à filtrer. L'équation de récurrence s'écrit donc :

$$s_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_M e_{k-M} = \sum_{i=0}^{M} b_i e_{k-i}$$

M est **l'ordre** du filtre.
On peut remarquer qu'un filtre RIF d'ordre M possède **N=M+1** coefficients b_i.

2. Structure de réalisation

2.1 Structure directe

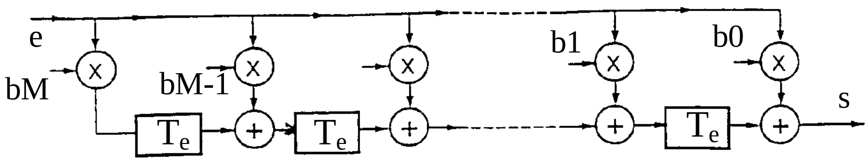


La mise en œuvre nécessite pour chaque valeur de sortie M multiplications et M additions. Il faut de plus M+1 mémoires pour les coefficients et M+1 mémoires de données. L'expression de la sortie s_k amène naturellement à la structure dite <u>directe</u> représentée ci-dessus.

Le fonctionnement de l'ensemble est cadencé dans le temps au rythme de la période d'échantillonnage T_e. La cellule T_e représente un opérateur de retard temporel T_e. La valeur présente sur son entrée au temps kT_e se retrouve sur sa sortie au temps $(k-1)T_e$. Au temps kT_e, on réalise donc l'opération :

$$s_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_M e_{k-M} \quad \text{ou} \quad s(kT_e) = b_0 e(kT_e) + b_1 e((k-1)T_e) + \ldots + b_M e((k-M)T_e)$$

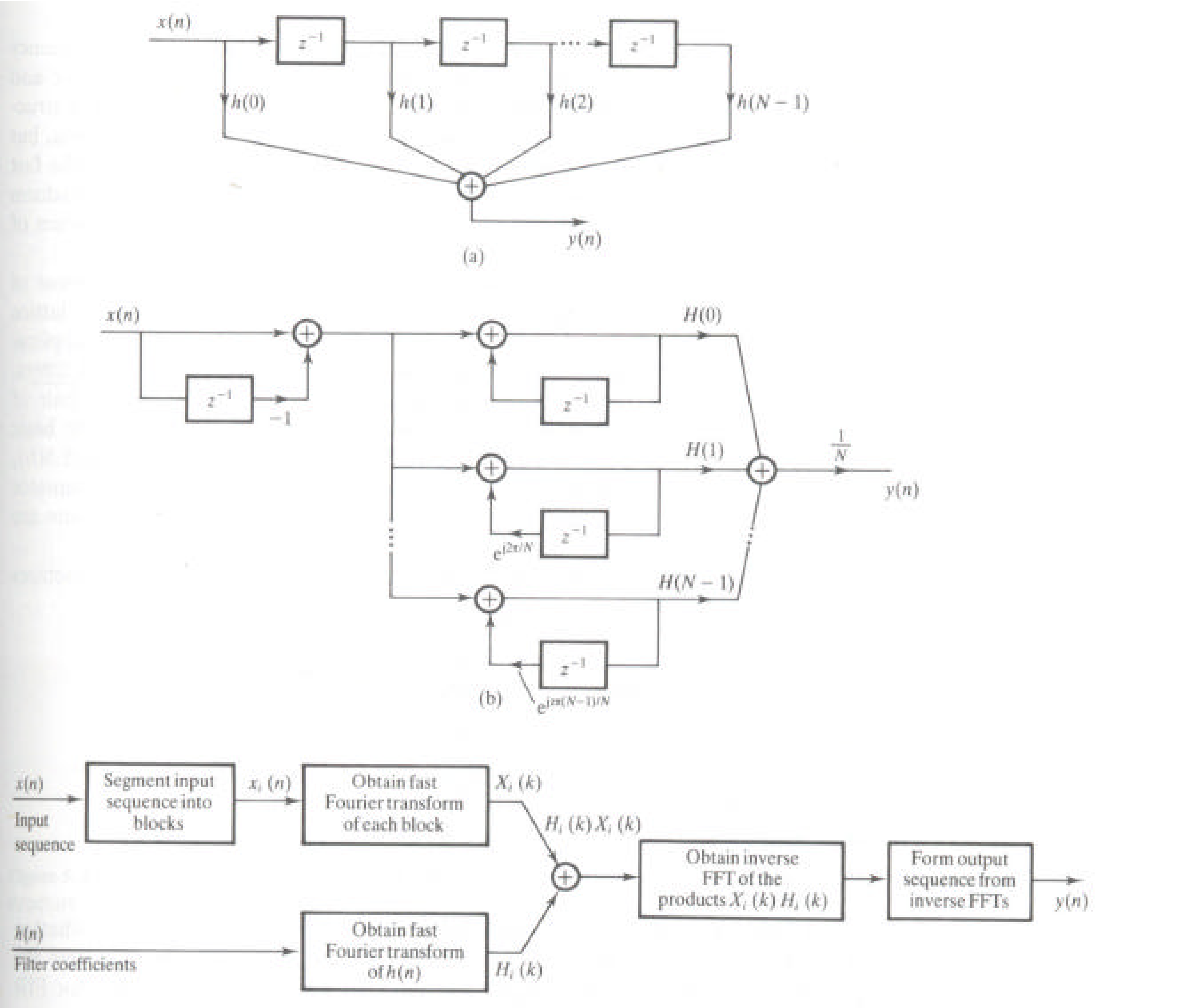
2.2 Structure transposée



On peut aussi imaginer une structure dite <u>transposée</u>. Dans cette structure, les cellules à retard ne mémorisent pas les entrées mais des sommes partielles.

Au temps kT_e, on trouve des cellules à retard successives $b_M e_{k-1}$, $b_M e_{k-2} + b_{M-1} e_{k-1}$, ..., $b_M e_{k-M} + \ldots + b_1 e_{k-1}$. On réalise donc en sortie du filtre le calcul de s_k. Quelle que soit la structure choisie, il n'y a pas de boucle de réaction. On n'utilise pas les valeurs des sorties précédentes pour calculer la sortie actuelle. Pour cette raison, le filtre est fréquemment désigné par <u>filtre non-récursif</u>.

2.3 Autres structures



3.1 La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est la réponse à la séquence causale δ_k = (1,0,0,...). On obtient :

$$h_k = b_0 d_k + b_1 d_{k-1} + ... + b_M d_{k-M}$$

c'est-à-dire : $h_i = 0$ si $i < 0$(causalité),

$$h_0 = b_0.1 + b_1.0 + ... + b_M.0 = b_0,$$

$$h_1 = b_0.0 + b_1.1 + ... + b_M.0 = b_1,$$

$$..., \ h_i = b_i,$$

$$h_M = b_0.0 + b_1.0 + ... + b_M.1 = b_M,$$

$h_j = 0$ si $j > M$.

Ainsi, les coefficients de pondération ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre. Puisque ces coefficients sont en nombre limité, la réponse impulsionnelle du filtre s'annule au bout de M+1 valeurs. On dit qu'elle est finie et le filtre est lui-même appelé filtre à réponse impulsionnelle finie ou filtre RIF (Finite Impulse Response : FIR pour les Anglo-saxons).

L'équation de récurrence de définition du filtre peut s'écrire en remplaçant les coefficients b_i par les valeurs h_i de la réponse impulsionnelle :

$s_k = h_0 e_k + h_1 e_{k-1} + \ldots + h_M e_{k-M}$, ou, de manière plus condensée : $s_k = \sum_{i=0}^{M} h_i e_{k-i}$.

4. La réponse indicielle

C'est le signal $\{d_k\}$ réponse au signal causal Γ_k = (1,1,1,.....1). La séquence représentative de $\{d_k\}$ vérifie :

$$d_k = b_0 \Gamma_k + b_1 \Gamma_{k-1} + \ldots + b_M \Gamma_{k-M}$$

c'est-à-dire : $d_i = 0$ si $i < 0$(causalité),

$$d_0 = b_0.1 + b_1.0 + ... + b_M.0 = b_0,$$

$$d_1 = b_0.1 + b_1.1 + ... + b_M.0 = b_0 + b_1,$$

$$..., \ d_i = b_0 + b_1 + ... + b_i,$$

$$d_M = b_0.1 + b_1.1 + ... + b_M.1 = b_0 + b_1 + ... + b_M,$$

$d_j = d_M$ si $j > M$.

Ainsi la valeur finale de la réponse indicielle est égale à la somme des coefficients du filtre RIF. Cette valeur est atteinte au bout de M+1 sorties.

5. La réponse fréquentielle

5.1 Fonction de transfert en z

La fonction de transfert en z s'écrit :

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M} \text{ ou, de manière plus condensée, } H(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} .$$

Elle ne présente pas de pôle mais seulement des zéros, le filtre RIF sera par conséquent toujours **stable**.

5.2 Réponse en fréquence

Il suffit de remplacer z par $e^{j2\Pi f T_e}$,d'où :

$$H(jf) = H(f) = b_0 + b_1 e^{-j2\Pi f T_e} + \ldots + b_M e^{-j2\Pi M f T_e} \text{ soit } H(jf) = \sum_{i=0}^{M} b_i e^{-j2\Pi i f T_e}$$

Cette réponse est bien sûr périodique de période fréquentielle $F_e = \frac{1}{T_e}$. Les coefficients de pondération du filtre RIF constituent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction de transfert H(jf).