

Chapitre 1 : Objectifs et besoins mathématiques

1. Objectifs du cours de traitement du signal

Le cours de traitement du signal a pour objet :

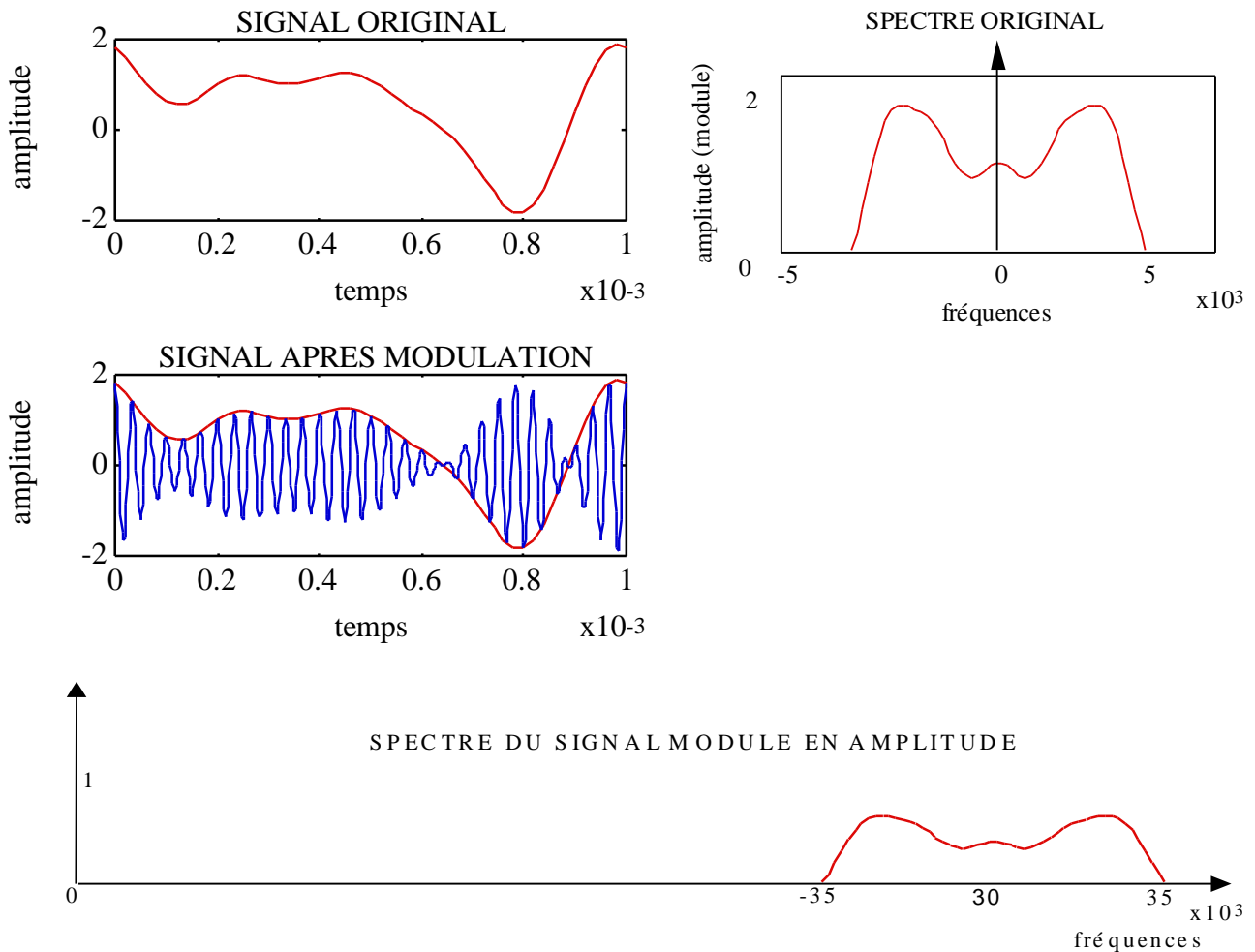
- Le traitement volontaire des signaux afin de leur donner des caractéristiques intéressantes. Il s'agira essentiellement d'adapter le signal à son canal de transmission (câble coaxial ou paires, fibre optique, liaison hertzienne),
- L'analyse des signaux afin de quantifier dans quelle mesure ceux-ci ont pu être dégradés, notamment suite à une transmission.

Pour traiter et analyser les signaux, il est habituel d'étudier conjointement ce qui se passe dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. L'utilisation du domaine temporel semble assez naturelle et permet de mettre en évidence certaines caractéristiques du signal :

- signal périodique (durée de la période, fréquence) ou non périodique,
- valeur de l'amplitude (amplitude moyenne, amplitude maximale...),
- signal analogique ou discret.

Le spectre du signal, c'est-à-dire sa représentation fréquentielle, a pour objet de faire apparaître les plages de fréquences utilisées par le signal, ceci notamment afin de rendre compatibles le signal et son canal de transmission.

Exemple de la modulation d'amplitude qui permet de transmettre un signal (voix, musique) par voie hertzienne, dans le cas d'une station de radio.



Sur les dessins ci-dessus, nous constatons :

- dans le domaine temporel, l'opération de modulation d'amplitude revient à effectuer le produit entre le signal original et une "porteuse" (sinusoïde de fréquence très élevée). Le signal obtenu est la sinusoïde "modulée en amplitude" par le signal original.
- dans le domaine fréquentiel, l'opération de modulation d'amplitude revient à "translater" le spectre autour de la fréquence de la porteuse f_p .

Le dessin obtenu dans le domaine fréquentiel est très aisé à interpréter et à construire graphiquement, c'est la raison pour laquelle nous travaillerons dans la suite avec ces spectres.

Le plan du cours est le suivant :

- Etude des signaux analogiques dans le domaine temporel,
- Calcul de spectres de signaux analogiques à l'aide du développement en série de Fourier dans le cas des signaux périodiques et de la transformée de Fourier d'un signal analogique (TFSA) dans le cas des signaux non périodiques,
- Etude des signaux discrets et des problèmes d'échantillonnage,
- Calcul de spectres de signaux discrets à l'aide de la transformée de Fourier d'un signal discret (TFSD),
- Calcul et représentation de spectres par ordinateur à l'aide de la transformée de Fourier discrète (TFD) ou rapide (TFR, ou FFT en Anglais).

2. Notions de mathématiques à revoir (ou à voir)

De manière à ne pas perdre trop de temps avec des notions qui doivent être connues, vous trouverez ci-dessous les pré-requis mathématiques indispensables pour pouvoir suivre le module TdS de 1^{ère} Année. N'hésitez pas à travailler ceux qui peuvent vous poser problème.

2.1. Intégration par parties

But : Cette technique permet entre autres de calculer des intégrales de type $\int_a^b (a + bt + g^2 + \dots) \sin(\omega t + j) dt$

ou des intégrales de type : $\int_a^b (a + bt + g^2 + \dots) e^{-j(\omega t + j)} dt$

c'est-à-dire des intégrales de produit entre un polynôme et une fonction de type exponentielle ou trigonométrique. De fait, cet outil sera notamment très utile pour le calcul de spectre de signaux

triangulaires.

Démonstration : Si f et g sont dérivables sur $[a, b]$:

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

d'où : $\int_a^b [f(t).g(t)]'.dt = \int_a^b f'(t).g(t).dt + \int_a^b f(t).g'(t).dt$,

c'est-à-dire : $\int_a^b f(t).g'(t).dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t).g(t).dt$

Utilisation :

- on pose $f(t)$ =la fonction polynomiale et $g'(t)$ la fonction exponentielle ou trigonométrique
- on calcule ensuite $f'(t)$ et $g(t)$;
- on détermine enfin $\int_a^b f(t).g'(t).dt$

Exemple 1 : soit à calculer $I_1 = \int_0^P t.\sin t.dt$, on pose : $\begin{cases} f(t) = t, g'(t) = \sin t \\ f'(t) = 1, g(t) = -\cos t \end{cases}$

d'où $I_1 = [t.(-\cos t)]_0^P - \int_0^P 1.(-\cos t).dt = P + [\sin t]_0^P = P$.

Exemple 2 : soit à calculer $I_2 = \int_{-P}^0 3t.e^{-jt}.dt$, on pose : $\begin{cases} f(t) = 3t, g'(t) = e^{-jt} \\ f'(t) = 3, g(t) = \frac{e^{-jt}}{-j} = je^{-jt} \end{cases}$

$$\text{d'où } I_2 = \left[3t.(je^{-jt}) \right]_{-p}^0 - \int_{-p}^0 3.(je^{-jt}).dt = 3jpe^{jp} + 3j \left[\frac{e^{-jt}}{-j} \right]_{-p}^0 = -3jp - 3(1 - (-1)) = -3jp + 6.$$

2.2. Suites, séries

L'outil mathématique utilisé est \sum , cet outil permet d'écrire des sommes de manière condensée.

Exemple 1 : $\sum_{k=0}^{10} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

Exemple 2 : $\sum_{k=-2}^3 5^k = 5^{-2} + 5^{-1} + 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3$

Un résultat intéressant est la **somme de la série géométrique** :

$$\sum_{k=0}^N a^k = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a} \text{ où } a \text{ est appelée la raison de la série géométrique}$$

2.3. Maniement des nombres complexes (module, argument, partie réelle, partie imaginaire).

Un nombre complexe c s'exprime par $c = a + jb$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a est la partie réelle et b la partie imaginaire.

Le module d'un nombre complexe s'écrit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

L'argument du nombre complexe c s'écrit :

- $\arg(c) = \mathbf{j} = \text{Arctg} \left(\frac{b}{a} \right)$ si c est à partie réelle positive ($a > 0$)
- $\arg(c) = \mathbf{j} = \text{Arctg} \left(\frac{b}{a} \right) \pm \mathbf{p}$ si c est à partie réelle négative ($a < 0$)

Il est également possible d'écrire c sous la forme : $c = r.e^{ij}$.

Exemple : $c = -1 - j$, $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\arg(c) = \mathbf{j} = \text{Arctg} \left(\frac{-1}{-1} \right) \pm \mathbf{p} = \frac{-3\mathbf{p}}{4}$, on peut écrire

$$c = \sqrt{2}.e^{-j3\mathbf{p}/4}.$$

2.4. Maniement de la trigonométrie et des exponentielles complexes.

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b, \quad \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b,$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \cdot \text{tgb}}, a, b, a+b \neq \frac{\mathbf{p}}{2} \pmod{\mathbf{p}}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a, \quad \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b,$$

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tga} - \text{tgb}}{1 + \text{tga} \cdot \text{tgb}}, a, b, a-b \neq \frac{\mathbf{p}}{2} \pmod{\mathbf{p}}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)], \quad \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)], \quad \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a, \quad \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a, \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Pour tout entier rationnel n ,

$$(\cos a + j \sin a)^n = \cos na + j \sin na, \quad (\cos a - j \sin a)^n = \cos na - j \sin na$$

$$\text{Formules d'Euler : } \cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} ; \sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} ; \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = j \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{e^{jt} + e^{-jt}} ;$$

$$e^{j.t} = \cos t + j.\sin t$$

$$\text{Autres formes des formules d'Euler : } 2.\cos t = (1 + e^{-2.j.t})e^{j.t} ; 2.j.\sin t = (1 - e^{-2.j.t})e^{j.t}$$

2.5. Dérivées et primitives

primitives	fonctions	dérivées
$\frac{1}{a}.\sin(at + b)$	$\cos(at + b)$	$-a.\sin(at + b)$
$-\frac{1}{a}.\cos(at + b)$	$\sin(at + b)$	$a.\cos(at + b)$
$\frac{1}{a}e^{a.t+b}$	$e^{a.x+b}$	$a.e^{a.t+b}$

2.6. Sinus cardinal $\sin c(t) = \frac{\sin(t)}{t}$

Ce signal, très utile en télécommunications, ne pose pas de problème particulier concernant son étude ; le seul point problématique est 0 qui se résout de la manière suivante :

$$\sin c(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Une autre définition de sinus cardinal que l'on trouve quelquefois dans la littérature et notamment dans Matlab est la

$$\text{suivante : } \sin c(t) = \frac{\sin(\mathbf{p})}{\mathbf{p}}$$

2.7. Utilisation du serveur web "Traitement du signal"

Ce serveur est disponible à l'adresse suivante <http://lara0.esstin.u-nancy.fr/ineit-tn>

pour l'adresse principale à partir de laquelle vous avez accès à différentes parties qui peuvent vous intéresser (notamment la partie "computer").

La partie sur le traitement du signal se trouve à l'adresse suivante :

<http://lara0.esstin.u-nancy.fr/ineit-tn/sensor/chapter3-sampling-quantization/francais/home-fourier-fra.html> pour la partie française.

Dans différentes parties du poly, il vous est proposé de vous connecter sur ce serveur mis en place dans le cadre d'un projet européen, dont certaines parties ont été développées ou écrites par des étudiants dans le cadre de projets tutorés. Ce serveur contient des morceaux de cours, dans certains cas complémentaires du poly, ainsi que des simulations (sous forme d'applets java) permettant d'aider à la compréhension de certains phénomènes de traitement du signal.

