<u>Chapitre 6 : Calcul de spectres par calculateur</u>

Transformée de Fourier Discrète (TFD) & Transformée de Fourier Rapide (TFR)

Lorsque l'on désire **calculer la transformée de Fourier par ordinateur** ou via **un module de calcul FFT**, il faut trouver une expression de la transformée de Fourier qui donne non pas une expression continue de la variable f (impossible à faire sur un ordinateur) mais une suite d'échantillons de cette transformée de Fourier : c'est la **TFD/DFT (Transformée de Fourier Discrète / Discrete Fourier Transform)** ou la **TFR/FFT (transformée de Fourier Rapide / Fast Fourier Transform)**. La TFR/FFT est en fait un algorithme optimisé plus efficace pour le calcul de la TFD/DFT.

<u>1. Transformée de Fourier Discrète (TFD)</u>

Le principe de la TFD consiste, à partir de M échantillons du signal $s_0, s_1, ..., s_k, ..., s_{M-1}$ de déterminer M échantillons de la TFD : $S_0, S_1, ..., S_n, ..., S_{M-1}$. Les M échantillons de la transformée représentent **une** période de cette tranformée, soit prise entre $\frac{-F_e}{2}$ et $\frac{F_e}{2}$ (c'est-à-dire entre $-\frac{1}{2.T_e}$ et $\frac{1}{2.T_e}$), soit entre 0 et F_e.

L'expression mathématique de la TFD est la suivante :

$$\boxed{S(n.f_i) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e)e^{-j2pkT_e nf_i}} \text{ ou } \boxed{S(\frac{n}{M}) = \sum_{k=0}^{M-1} s(kT_e)e^{-j2pk\frac{n}{M}}}$$

où $s(kT_e)=s_k$ représente le $k^{ème}$ échantillon du signal temporel,

$S(nf_i)=S(n/M)=S_n$ le $n^{ème}$ échantillon de la TFD,

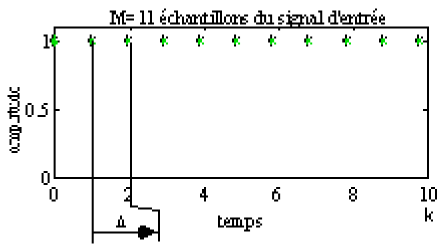
k est l'indice temporel,

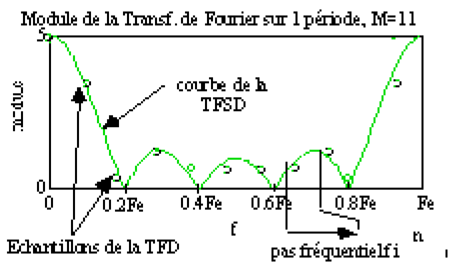
n est l'indice fréquentiel,

M est le nombre total d'échantillons du signal ainsi que celui de la TFD (typiquement 1024),

f_i est appelé le pas fréquentiel et représente la distance entre deux échantillons du spectre, cette valeur est donc telle que $\boxed{f_i = \frac{F_e}{M}}$.

<u>Ex</u> : pour M=11





<u>Exercice</u> :

Soit le signal échantillonné $\{s_k\}$: $s_k= 1$ pour k = 0 et k = 1.

$s_k = 0$ ailleurs.

Calculer la TFD d'ordre 4 de $\{s_k\}$ et représenter le module du spectre.

<u>Solution :</u>

1) Calcul de la TFD sur 4 échantillons (4 échantillons de la TFD à partir de 4 échantillons du signal)

$$S(n)=\sum_{k=0}^{M-1} s_k . e^{-j.2.p.k.n/M}\quad \text{pour n=0, 1 , ... , M-1 et M=4}$$

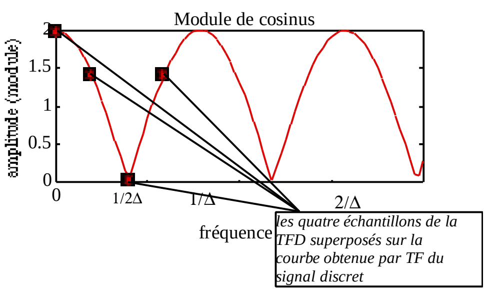
$$\begin{cases}
n=0, \quad S(0)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{0}=s(0)+s(1)+s(2)+s(3)=2 \\
n=1, \quad S(1)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi k/4}=s(0)+s(1)e^{-j2\pi/4}+s(2)e^{-j2\pi 2/4}+s(3)e^{-j2\pi 3/4}=1+e^{-j\pi/2}=2\cos(\pi/4)e^{-j\pi/4} \\
n=2, \quad S(2)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi 2k/4}=1+e^{-j\pi}=2\cos(\pi/2)e^{-j\pi/2} \\
n=3, \quad S(3)=\sum_{k=0}^{3} s(k)e^{-j2\pi 3k/4}=1+e^{-j\pi 3/2}=2\cos(3\pi/4)e^{-j3\pi/4}
\end{cases}$$

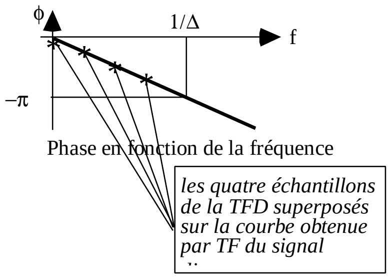
Modules de ces 4 échantillons :

$$\begin{cases}
|S(0)|=|2|=2 \\
|S(1)|=\left|2\cos(\pi/4)e^{-j\pi/4}\right|=2|\cos(\pi/4)|=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \\
|S(2)|=\left|2\cos(\pi/2)e^{-j\pi/2}\right|=2|\cos(\pi/2)|=2.0=0 \\
|S(3)|=\left|2\cos(3\pi/4)e^{-j3\pi/4}\right|=2|\cos(3.\pi/4)|=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}
\end{cases}$$

Arguments de ces 4 échantillons :

$$\begin{cases}
\arg(S(0))=\arg(2)=0 \\
\arg(S(1))=\arg(2)+\arg(\cos(\pi/4))+\arg\left(e^{-j\pi/4}\right)=0+0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4} \\
\arg(S(2))=\arg(2)+\arg(\cos(\pi/2))+\arg\left(e^{-j\pi/2}\right)=0+0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2} \\
\arg(S(3))=\arg(2)+\arg(\cos(3\pi/4))+\arg\left(e^{-j3\pi/4}\right)=0+0-\frac{3\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}
\end{cases}$$





2. Transformée de Fourier discrète inverse (TFID)

$$\boxed{s_k=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} S_n e^{j2pkT_e nf_i}=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} S_n e^{j2pk\frac{n}{M}}}$$

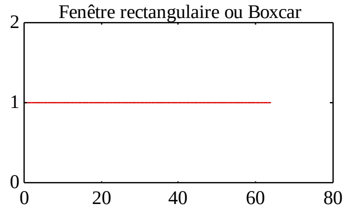
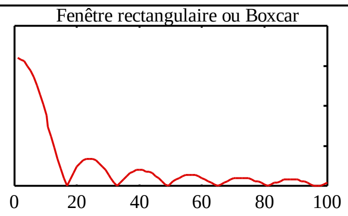
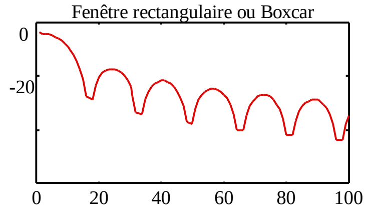
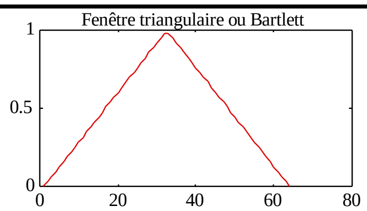
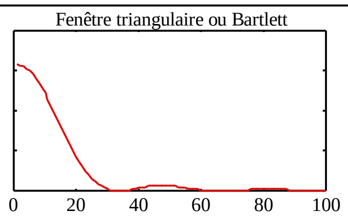
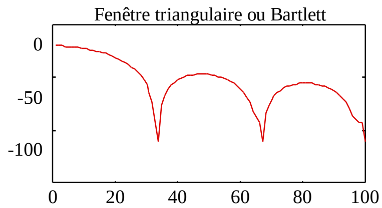
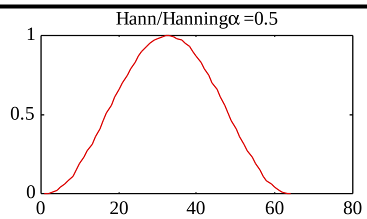
TABLE DE TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRETE

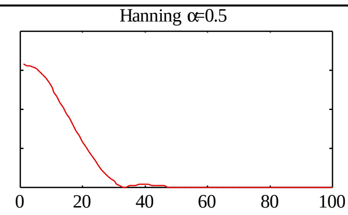
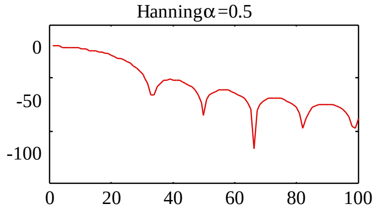
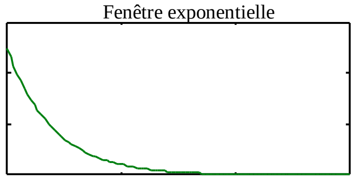
(T_e est la période d'échantillonnage)

	$s(kT_e) = s_k$	$S_n = \sum_{k=0}^{M-1} s_k e^{-j2pkT_e nf_i}$
Propriétés ou théorèmes	domaine temporel	domaine fréquentiel
Linéarité	$\{x_k + y_k\}$ $\{A.s_k\}$ $\{0\}$	$X_n + Y_n$ $A.S_n$ 0
Théorème du retard	$\{ s_{k-k_{0\,\mathrm{modulo}M}} \}$	$S_n.e^{-j.2.p.k_0.n/M}$
	$\{ s_k.e^{j.2.p.n_0.k/M} \}$	$S_{n-n_{0\,\mathrm{modulo}M}}$

3. Problèmes de fenêtrage (apodisation)

Les fenêtres ci-dessous ont été calculées par MATLAB avec N = 64

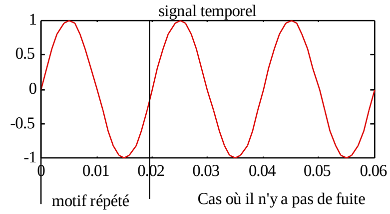
Ci-contre : domaine temporel		Cette fenêtre est définie par : $\begin{cases} f_n = 1 \text{ pour } 0 \le n \le N-1 \\ f_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$ Son expression fréquentielle est : $W_R(e^{j.2.\pi.f}) = e^{-j.\pi(N-1).f}.\dfrac{\sin(\pi.N.f)}{\sin(\pi.f)}$
Ci-contre : domaine fréquentiel : à gauche, échelle linéaire à droite : ordonnées en dB		
Ci-contre : domaine temporel		Cette fenêtre est définie par : $\begin{cases} f_n = \dfrac{n}{N/2} \text{ pour } 0 \le n \le N/2 \\ f_{N-n} \text{ pour } N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$ Son expression fréquentielle est : $W_T(e^{j.2.\pi.f}) = e^{-j.2.\pi(N/2-1).f}.\left(\dfrac{\sin(\pi.\frac{N}{2}.f)}{\sin(\pi.f)}\right)^2$
Ci-contre : domaine fréquentiel : à gauche, échelle linéaire à droite : ordonnées en dB		
Ci-contre : domaine temporel		La fenêtre de Hann (ou Hanning) est le cas particulier de la fenêtre de Hamming généralisée pour α = 0,5. Les fenêtres de la famille Hamming se caractérisent par un pic central de largeur double de la fenêtre rectangulaire mais une atténuation des oscillations sensiblement plus importante. La représentation fréquentielle de la fenêtre de Hamming généralisée a pour équation : $W_{Hg}(e^{j.2.\pi.f}) = \alpha.W_R +$ $\dfrac{1-\alpha}{2}.[W_R(e^{j.2.\pi.(f-1/N)}) + W_R(e^{j.2.\pi.(f+1/N)})]$

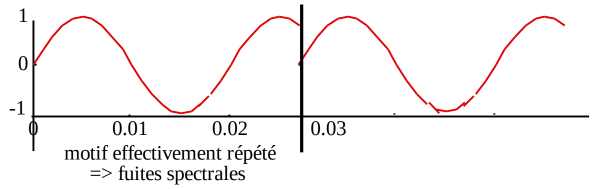
Ci-contre : domaine fréquentiel : à gauche, échelle linéaire à droite : ordonnées en dB		
Ci-contre : domaine temporel	 La fenêtre à réponse exponentielle est utile pour la mesure des signaux transitoires (de type impulsion).	Le début du signal n'est pas perturbé, mais la fin de l'enregistrement temporel est forcée à zéro. **La fenêtre exponentielle ne convient que pour la mesure des signaux transitoires.** Cette fenêtre est définie par : $\begin{cases} f_n = B.e^{-at} \text{ pour } t \geq 0 \\ f_n = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$ Son expression fréquentielle est : $W_E(e^{j2\pi f}) = \frac{1}{j.2.\pi.f + a}$

Problème des fuites spectrales

Ce problème intervient lorsque la transformée de Fourier rapide n'est pas calculée sur un nombre entier de périodes. Le motif répété pour créer le signal périodique n'est dans ce cas pas celui attendu. En effet, dans ce cas, le spectre obtenu par FFT n'est pas une bonne approximation du spectre du signal. Étant donné que l'utilisateur n'a souvent aucun contrôle sur la localisation du signal dans l'enregistrement temporel, il faut généralement envisager l'existence possible d'une discontinuité. Cet effet, connu sous le nom de fuites (leakage) est manifeste dans le domaine fréquentiel. Cette discontinuité provoque, par effet de transitoire, un élargissement de la raie spectrale (qui devrait apparaître très fine). L'utilisation d'une fenêtre type Hanning ou Blackman aura pour effet, en filtrant fortement les extrémités du motif dans le domaine temporel, d'atténuer l'effet des fuites. Il pourra également être le cas échéant judicieux d'essayer, lorsque cela est possible, de synchroniser l'analyseur de spectre (module FFT) sur un nombre entier de périodes d'échantillonnage du signal périodique à analyser. D'autre part, la résolution de l'analyseur (plus petite fréquence entre deux raies) est égale à $1/T_e$.

Les courbes ci-dessous concernent une sinusoïde de f = 50 Hz et d'amplitude 1 échantillonnée à f_e = 1000 Hz.





4. Utilisation du serveur web

Dans le paragraphe 4 du serveur, vous trouverez :

- Une partie de cours en Anglais sur la transformée de Fourier rapide proposée par l'Université de Ulm,
- Une simulation (applet Java) permettant le calcul du spectre de signaux en utilisant la FFT.